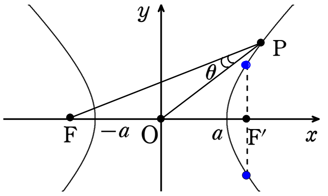
有心２次曲線のある角の最大について

斎 木 清 治

1　はじめに

本校の理科・数学の課題研究において，3 年生の橋爪悠太朗君が次のような問題を発見して，その研究に取り組んだ．

> $a>0$ として双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 上の点 P と中心 O，1 つの焦点 F $(-\sqrt{a^2+1},\ 0)$ に対して，∠OPF の最大を与える P はどこか．



その中で $a=1$ の直角双曲線の場合，最大を与える点が焦点 F' $(\sqrt{2},\ 0)$ の真上（または真下）であることを明らかにした．一般の場合に鋭意取り組んだものの，煩雑な計算の前にあえなく結論に至ることが出来なかった．

そこで，双曲線以外に楕円の場合も含めて考察し，彼の雪辱を果たしたい．

なお, 投稿に関しては橋爪君の了解済である．

2　双曲線の場合

P が第 1 象限にあるとして，上の枠内の設定で進める．

$\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{\cos t},\ \tan t\right)$（ただし， $0<t<\pi/2$），

$\angle \mathrm{OPF}=\theta$ とし，

$\angle x\,\mathrm{OP}=\alpha$， $\angle x\,\mathrm{FP}=\beta$ とすると，

$\tan\alpha=\dfrac{\sin t}{a}$， $\tan\beta=\dfrac{\sin t}{a+\sqrt{a^2+1}\,\cos t}$ で，

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+1}\,\sin t\cos t}{a(a+\sqrt{a^2+1}\,\cos t)+\sin^2 t}$$

となる．

$\sin t>0$ から， $\cos t=c$ とおくと $0<c<1$ で

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{a^2+1}\,c\sqrt{1-c^2}}{a^2+1+a\sqrt{a^2+1}\,c-c^2}$$

となり，右辺を $f(c)$ とおく．

$f(c)$ の分母 $=0$ とすると， $-1<c<1$ を満たす値は $c=\dfrac{\sqrt{a^2+1}(a-\sqrt{a^2+4})}{2}<0$ である．

$$f'(c)=\frac{a(a^2+1)c^3+\sqrt{a^2+1}\,(2a^2+1)c^2-(\sqrt{a^2+1}\,)^3}{\sqrt{1-c^2}\,\{c^2-a\sqrt{a^2+1}\,c-(a^2+1)\}^2}$$

で， $f'(c)=0$ とすると

$c=\dfrac{-a\pm\sqrt{5a^2+4}}{2\sqrt{a^2+1}}$， $-\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$ である．

このうち， $a>0$ で $0<c<1$ を満たす値は

$c_1=\dfrac{-a+\sqrt{5a^2+4}}{2\sqrt{a^2+1}}$ であり，増減を調べると

$c=c_1$ で極大かつ最大となる．

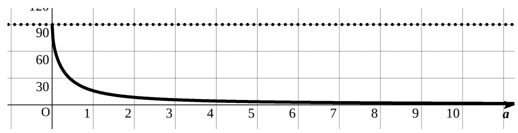
よって，∠OPF を最大にする点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{2a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{5a^2+4}-a},\ \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\sqrt{5a^2+4}-a}}\right)$$

である．

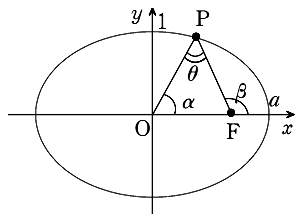
ここで $a=1$ とすると双曲線は直角双曲線であり， $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ 1)$ となり，焦点 F′ の真上にある．

また，a の値に対する最大角 (°) は下のようである．



3　楕円の場合

楕円を $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(a>1)$ とし，楕円上の点を $\mathrm{P}(a\cos t,\ \sin t)$ とし，O と焦点 F $(\sqrt{a^2-1},\ 0)$ について， $\angle\mathrm{OPF}=\theta$ とする．



$\angle x\,\mathrm{OP}=\alpha$，

$\angle x\,\mathrm{FP}=\beta$，

$\tan\alpha=\dfrac{\sin t}{a\cos t}$， $\tan\beta=\dfrac{\sin t}{a\cos t-\sqrt{a^2-1}}$

であるから

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-1}\,\sin t}{a^2\cos^2 t-2\sqrt{a^2-1}\,\cos t+\sin^2 t}$$

となる．

$\sin t>0$ から， $\cos t=c$ とおくと

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{a^2-1}\sqrt{1-c^2}}{(a^2-1)c^2-ac\sqrt{a^2-1}+1}$$

となり，右辺を $g(c)$ とおく．

$-1<c<1$ であり，分母 $=0$ とすると，

$c=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2\sqrt{a^2-1}}$ となり，

(i) $1<a<2$ のときこれは実数ではない．

(ii) $a=2$ のとき $c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ．

(iii) $a>2$ のとき

$0<\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2\sqrt{a^2-1}}<\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2\sqrt{a^2-1}}<1$ の関係がある．

$$g'(c)=\frac{\sqrt{a^2-1}\{(a^2-1)c^3-(2a^2-1)c+a\sqrt{a^2-1}\}}{\sqrt{1-c^2}\{(a^2-1)c^2-a\sqrt{a^2-1}c+1\}^2}$$

で， $g'(c)=0$ とすると

$c=\dfrac{-a\pm\sqrt{5a^2-4}}{2\sqrt{a^2-1}}$， $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ である．

このうち， $-1<c<1$ をみたす値は $a>1$ から

$c_2=\dfrac{-a+\sqrt{5a^2-4}}{2\sqrt{a^2-1}}$ であり，

(i) $1<a<2$ のとき $0<c_2<1$ ．

(ii) $a=2$ のとき $c_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ．

(iii) $a>2$ のとき

$\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2\sqrt{a^2-1}}=p$， $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2\sqrt{a^2-1}}=q$ とおくと

$0<p<c_2<q<1$ となる．

また， $g(c_2)=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5a^2-4}-a}}{\sqrt{2a}\,(2a-\sqrt{5a^2-4})}$ である．

$g(c)$ の増減は

(i) $1<a<2$ のとき， $c=c_2$ で極大となる．

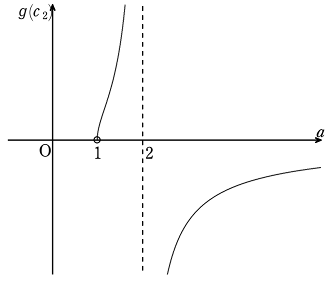
(ii) $a=2$ のとき，

c	-1	$\cdots$	c_2	$\cdots$	1
$g'(c)$		$+$		$-$	
$g(c)$	0	↗	∞	↘	0

(iii) $a>2$ のとき

c	-1	$\cdots$	p	$\cdots$	c_2	$\cdots$	q		1
$g'(c)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(c)$	0	↗	$\pm\infty$	↗	$g(c_2)$	↘	$\mp\infty$	↘	0

さらに， $g(c_2)$ のグラフは右のようである．



つまり， $1<a<2$ では最大角は鋭角であり， $a>2$ では最大角は鈍角である．

$a=2$ のとき，最大角は直角と予想されるが， $\tan\theta$ を用いるこの方法では正しく示すことが出来ない．

$a=2$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2\cos t,\ \sin t)$，

$\overrightarrow{\mathrm{FP}}=(2\cos t-\sqrt{3},\ \sin t)$ で，

内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FP}}=(\sqrt{3}\cos t-1)^2\geqq 0$ となるから，

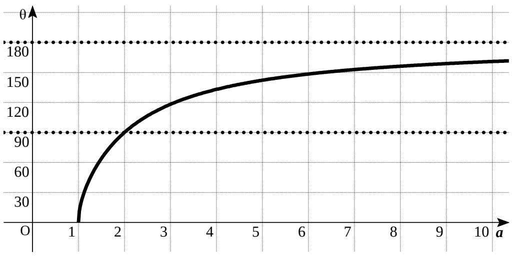
$\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $\theta=90°$ の最大値をとる．

結局，∠OPF を最大にする点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{a(\sqrt{5a^2-4}-a)}{2\sqrt{a^2-1}},\ \frac{\sqrt{2a(\sqrt{5a^2-4}-a)}}{2\sqrt{a^2-1}}\right)$$

である．

a の値に対する最大角 (°) は下のようである．



4　終わりに

このように調べてみると，最大角を与える点 P の座標が（平易な式ではないが）求まると言うこと自体が驚きである．

しかし，「導関数＝0」という 3 次方程式を解く段で大きな困難が待ち受けていることは事実である．この場合，結果的に $\sqrt[3]{}$ や i などを含まない形で解が求まったが，因数定理でこれを求めるのはなかなか難しいだろう．ちなみに，この解は GeoGebra によって求めたものである．

Maxima でこれらの方程式の解を求めてみたが，カルダノの公式を用いた表示をしてしまうため， $\sqrt[3]{}$ や i などを含んだずいぶん複雑な式表示になり，これほど簡単な式で c_1， c_2 が求まってこない．

その意味で, 問題解決が GeoGebra の高い因数分解能力に助けられたと言ってよいかも知れない．

筆算でこれに挑戦しようとしても，高校生には荷が重い計算であった．

※ 3(iii)の増減表中， $\pm\infty$, $\mp\infty$ の表記はそれぞれ $\infty|-\infty$, $-\infty|\infty$ のつもりである．

愛知県立一宮高等学校勤務（執筆時）

＜On the maximum of a certain angle in cored quadratic curve＞　2017/01/05