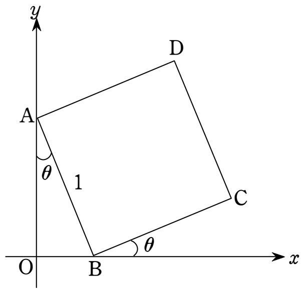
「正方形の中心は」に触発されて

斎　木　清　治

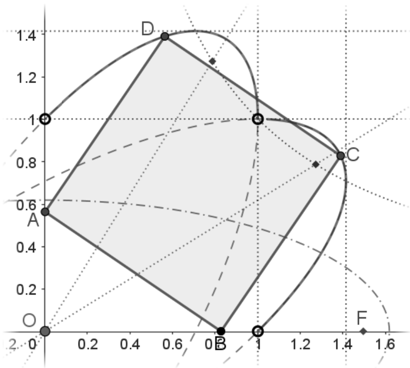
1　はじめに

『初等数学』第 98 号に，松田康雄先生の「正方形の中心は」というリポートが載っていたことを，第 99 号の白坂繁先生の「跡追い：正方形の中心は」を読むまで，見落としていた．
共に興味深い内容である．
これに関連する内容を少し掘り下げてみると，面白い結果が得られたので報告する．

2　正方形の他の頂点の軌跡

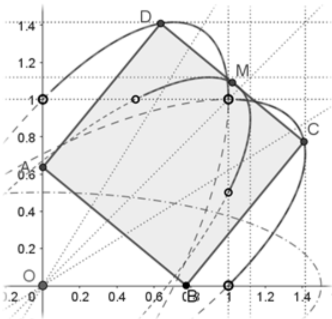


長さ 1 の線分 AB があり，A は y 軸の正の部分に，B は x 軸の正の部分に置く．このとき，頂点 C，D が第 1 象限に存在する図のような正方形 ABCD を考え，∠OAB= θ ($0<\theta<\pi/2$)とする．
このとき A(0, cos θ), B(sin θ , 0)，C(sin θ +cos θ , sin θ)，D(cos θ , sin θ +cos θ) である． θ が $0<\theta<\pi/2$ の範囲を動くとき，正方形 ABCD の中心の軌跡が線分になること，線分 AB の中点の軌跡が 4 分円になることは，上記リポートにおいてすでに明らかにされている．
正方形 ABCD の頂点 C, D の軌跡を求める．
C(X, Y) とすると，X=sin θ +cos θ , Y=sin θ で，$X^2=1+2\sin\theta\cos\theta\,, Y^2=\sin^2\theta$,
$XY=\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta$ から， θ を消去すると方程式 $X^2-2XY+2Y^2=1$ を得る．
また，X の範囲を調べると $X>1$ であることが分かる．
D についても同様にして，方程式 $2X^2-2XY+Y^2=1$,
$Y>1$ を得る．



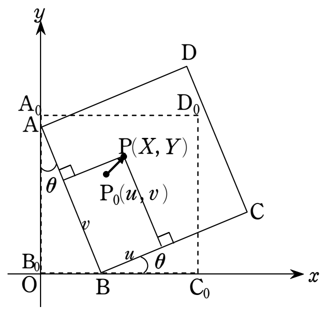
図示すれば，右の実線の楕円弧が軌跡であり，これらの楕円を O 中心の回転によって標準形にした楕円（の一部）が一点破線の曲線であり，その方程式は
$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}x^2+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}y^2=1$ である．
注意すべきは，D について述べれば，この D の軌跡を含む楕円 $2x^2-2xy+y^2=1$ は D がこの正方形の頂点の軌跡だから，特殊な楕円であるはずだということである．
どのような特殊性があるのかを調べてみる．
$f\ \ x,y\ \ =2x^2-2xy+y^2-1=0$ としたとき，この O を中心とする楕円の軸の方程式は
$x\dfrac{\partial f}{\partial y}=y\dfrac{\partial f}{\partial x}$ から $y^2-x^2-xy=0$ より$y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}x$ である．
長軸の傾きは正であるから，傾きは黄金比 $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ に等しい．
C についても同様に調べると，長軸の傾きは黄金比の逆数$\dfrac{1}{\varphi}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ になっている．
次に，これら 2 つの楕円の焦点（◆で表示してある）について考察する．
標準形に変換した楕円の焦点の座標は，公式に当てはめて計算すれば($\pm\sqrt[4]{5}$, 0)である．

D の軌跡の楕円（弧）の焦点については，直線 $y=\varphi x$ 上に存在するから$(k,k\varphi)$ とおけて，
O との距離の 2 乗から$k^2\ 1+\varphi^2\ =\sqrt{5}$ を満たし，このとき $k\cdot k\varphi=k^2\varphi=\dfrac{\sqrt{5}\varphi}{1+\varphi^2}=\dfrac{\sqrt{5}\varphi}{\varphi+2}=1$
であるから，この焦点は直角双曲線 $xy=1$ 上に存在する．
C の軌跡の楕円（弧）の焦点についても同様である．
以上から D の軌跡の特殊性を述べれば，<u>O を中心とする楕円の弧で，その楕円は黄金比 φ を傾きに持つ直線が長軸であり，点$(0,1),(1,1)$ を通り，焦点の両座標の積は 1 である</u>．

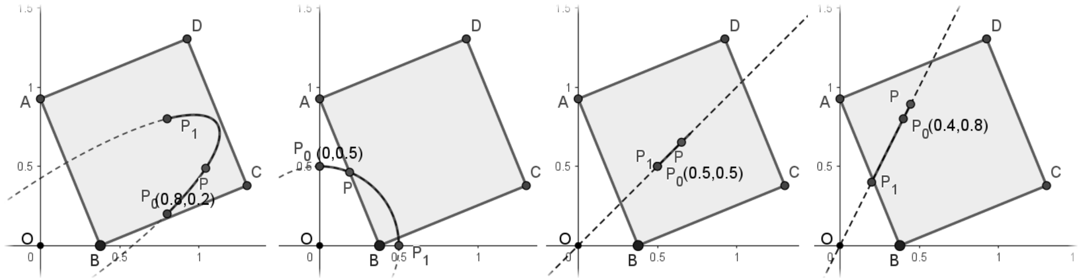


C についても同じような類似の特殊性を指摘できる．
なお，辺 CD の<u>中点 M の軌跡</u>を調べると，長軸は直線 $y=x$ 上にあり，2 点$(1,1)$，$(-1,\ -1)$ を焦点とする楕円 $20x^2-32xy+20y^2=9$ の一部で，右図のようになる．O 周りの回転によってこの楕円の標準形は$4x^2+36y^2=9$ (一点破線)であることが分かり，長軸の長さは 3, 短軸のそれは 1 というきっちりとした値である．

３　一般的な点の軌跡に関する考察



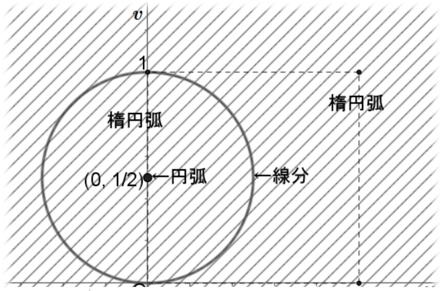
$\theta=0$ のときの正方形を図のように $A_0OC_0D_0$ とし，この内部に存在し，この正方形に張り付いている点 $P_0\ (u,\ v)$ $(0\leqq u\leqq 1,$
$0\leqq v\leqq 1, u^2+v^2\neq 0)$を考える．これが，$\theta$ の変化により図のような正方形 ABCD に変化し，点 P_0 が点 $P(X,\ Y)$に移動したとすると
$X=\sin\theta+u\cos\theta-v\sin\theta=(1-v)\sin\theta+u\cos\theta$,
$Y=u\sin\theta+v\cos\theta$ であるから
$\cos\theta=\dfrac{uX-\ 1-v\ Y}{u^2+v(v-1)}$,　　$\sin\theta=\dfrac{uY-vX}{u^2+v(v-1)}$
より θ を消去して
$\boldsymbol{u^2+v^2\ X^2-2uXY+\ u^2+\ v-1\ ^2\ Y^2=\left(u^2+v\ v-1\ \right)^2}$ ………… #
となる．これが，θ が変化したときの P の軌跡の方程式である．
#は，明らかに $P_0\ (u,\ v)$ と，$\theta=\pi/2$ に対応する点 $P_1(1-v,\ u)$を通る．
ここで，$u^2+v^2\neq 0$ であり，$\Delta/4=\ u^2+v^2\ \ u^2+\ v-1\ ^2\ -u^2=\left(u^2+v\ v-1\ \right)^2\geq 0$
である．
(i) $\Delta\neq 0$ のとき$\Delta>0$ であり，#は楕円(円を含む)を表す．軌跡は楕円弧(円弧を含む)で，2 点 P_0，P_1 を両端点に持つ(次頁上左図：u=0.8, v=0.2 のケース)．
特殊ケースとして，$u=0$ かつ $u^2+v^2=u^2+\ v-1\ ^2$　すなわち $u=0,\ v=0.5$ のとき円となるが，これは線分 AB の中点の軌跡である．
(ii) $\Delta=0$ すなわち $u^2+v\ v-1\ =0$ のとき，例えば$u=v=0.5$ のとき線分となるが，これは正方形の中心の軌跡である．
軌跡が線分になるのはこの正方形の中心以外にも存在し，上式を満たす例えば u=0.4, v=0.8 に対応する $P_0(0.4,0.8)$ の軌跡も線分となる(次頁上右図)．これは，ちょっとした驚きである．
線分となる場合は，この楕円がつぶれたケースと考えられ，次頁上右図のように，2 点 P_0, P_1 が両端点になるとは限らない．

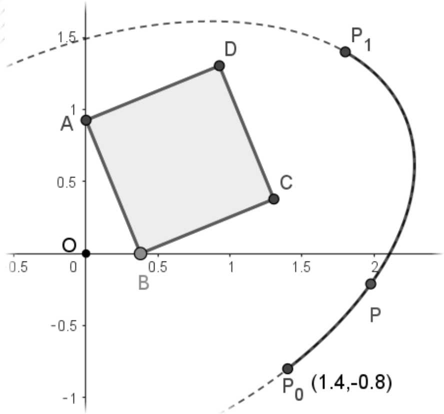


なお#は $0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1$ の条件を外して（※）も成り立ち，上に指摘した条件そのままに，軌跡は分類される．ただし，$u^2+v^2=0$ すなわち $u=0$ かつ $v=0$ のときは，$\mathrm{P_0}$=B なので軌跡は x 軸上の線分になる．

$\mathrm{P_0}\,(u, v)$ に対応する軌跡を図示して分類すれば，右図のようになり，円周上の点では線分になるが，それ以外の斜線部の点では楕円弧(円弧を含む)になる．

例えば，$\mathrm{P_0}(1.4, -0.8)$ の場合の軌跡は右下図のような楕円弧になる．





※　$\mathrm{P_0}$ が正方形の内部や周上にない場合は，この正方形に透明なシートが貼り付けてあり，正方形の外部のシート上の点 $\mathrm{P_0}$ が，A，B がそれぞれ y 軸，x 軸上を動く場合の軌跡として考えることになる．

4　おわりに

こういった軌跡問題において，GeoGebra は非常に便利である．

「軌跡ツール」で軌跡を調べる点と動点やパラメータ(スライダ)を指定すれば，一瞬にしてその軌跡を描写してくれるので，計算結果の確認にも役立つ．今回も，そのお世話になった．

2024 年 11 月 18 日