「きょうのスレスレ(回転編)」の設計

斎 木 清 治

1　はじめに

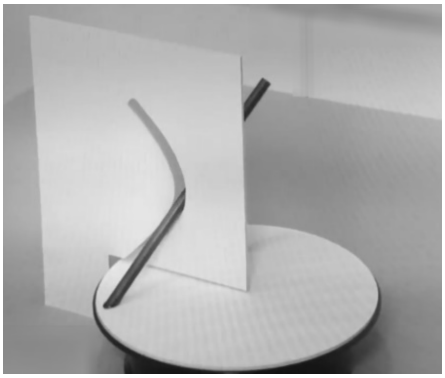
Eテレに「ピタゴラスイッチ」という番組があり，その中に「きょうのスレスレ」という映像コンテンツがある．人気のコンテンツで，同様に自作したと思われる動画を YouTube などでも閲覧できる．また， Eテレのコピー動画を載せている(と思われる)Twitter なども見かける．

立体が移動して行き，あるボードにあけられた穴やスリットをその立体がスレスレで通り抜けていくという動画である．立体が提示されたとき，どのような穴やスリットが必要なのかを想像する楽しみと,「答」の意外性に驚くといった内容であろう．

立体が直線移動し，その移動方向に垂直なボードというものもあるが，これは単にその立体のボードへの正射影の穴を少し大きめにあけるだけのことだから，どうということもない．

しかし，立体が回転移動する場合，ボードに必要な穴やスリットは簡単ではなく，面白い．

2　きょうのスレスレ(回転編)



E テレの回転編のものは，回転盤の回転軸とねじれの位置にある棒の一端が回転盤に固定されていて，回転軸を含む平面（ボード）に曲線のスリットが開いている．回転に伴い棒がこのスリットをスレスレに通り抜けていくというものである．

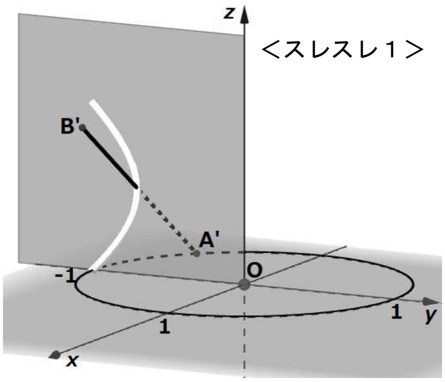
流れる音楽も単調でありながら，楽しい．

次のサイトなどで，そのスレスレ感をどうぞ．

（https://twitter.com/warasugimatome/status/700814844992348162）

これを，数学モデル化してみよう．

回転盤 $x^2+y^2 \leq 1$を xy 平面に置き, 回転軸を z 軸とする．棒の回転盤上の端を A(1, 0, 0), 他の端を B(1, 0, 1) に置いて，棒を A で回転盤に固定する．



ボードは平面 $x=0$ $(y<0)$ とする．円盤と棒は回転するが，ボードはその位置から動かない．

このとき，良く知られたように，この棒の軌跡は一葉回転双曲面(の一部)となる．このことを既知とする．棒の xy 平面への正射影の線分と O との最短距離が線分 AB の中点の影と O との距離によって与えられ，$\frac{1}{\sqrt{2}}$ である．よって，スリットの曲線（双曲線）の方程式は $2y^2-A(z-\frac{1}{2})^2=1$ とおくことができて，$y=0$ のとき $z=0$ (または $y=0$ のとき$z=1$) から$A=4$ となり，$2y^2-4(z-\frac{1}{2})^2=1$ すなわち，$y^2-2z^2+2z=1$である．

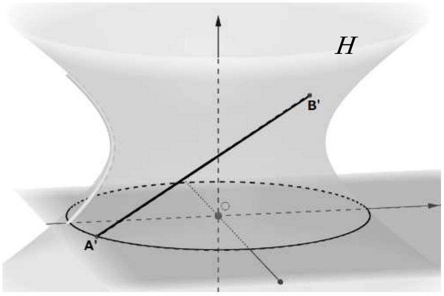
この棒の軌跡が一葉回転双曲面であることを既知としない場合について，述べておこう．

一般に点 $\mathrm{P}(a,b,c)$ が回転してこのボード(平面$x=0$, $y<0$) と交わる点 P*を, P の回転影と便宜的に呼ぶことにする．P*の座標は $y<0$ に注意して，P*(0, $-\sqrt{a^2+b^2}$, c) である．

線分 AB をパラメータ表示すると，$x=1-t, y=z=t$ $(0 \leq t \leq 1)$ であるから，線分 AB 上

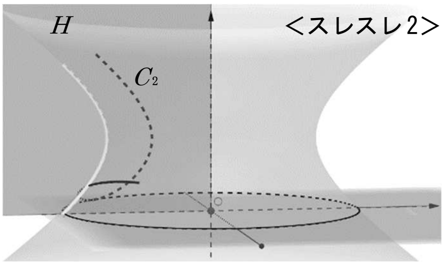
の点PはP$(1-t,\ t,\ t)$ $(0\leq t\leq 1)$ と表され，この回転影はP*$\left(0,\ -\sqrt{(1-t)^2+t^2},\ t\right)$ である．
P*$(0,Y,Z)$ とすれば，$Y=-\sqrt{(1-t)^2+t^2}$, $Z=t$ より$Y^2=(1-Z)^2+Z^2$ すなわち，
$Y^2-2Z^2+2Z=1\quad(Y<0)$ となり，先に求めたものと一致する．

また，A, B が z 軸周りに θ だけ回転した点はそれぞれ A'$(\cos\theta,\sin\theta,\ 0)$, B'$(-\sin\theta,\cos\theta,1)$であるから，線分A'B'上の点をP'とすると，
P'$((1-t)\cos\theta-t\sin\theta,(1-t)\sin\theta+t\,cos\,\theta,\ t)$ であり，これから，$t,\ \theta$ を消去すれば
$x^2+y^2-2z(z-1)=1$ となり，線分 A'B'の軌跡はこれを含む一葉回転双曲面 H の一部となっている．



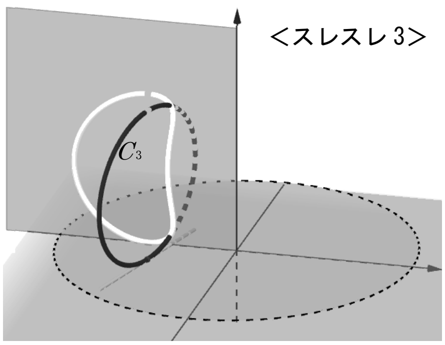
この双曲面とボードの平面 $x=0$ $(y<0)$ との交線がスリットとなる．

したがって，この H 上の任意の曲線の回転影はこのスリットになり，回転によってスレスレにこのスリットを潜り抜けていく．



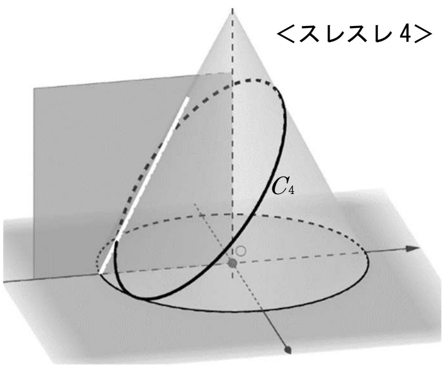
例えば図の**＜スレスレ 2＞**は H 上の曲線 C_2：
$x=\sqrt{t^4+2t^3-3t^2+1},\ y=t^2-t,\ z=t^2$ $(1\leq|t|\ )$
によるもので，この曲線はあたかも蛇のようにこのスリットを潜り抜けていく．もっとも，これを現実に製作するのは C の形態が複雑すぎて難しいかも知れない．

3　興味深いスレスレ



最初の**＜スレスレ 1＞**が面白いのは，単純な線分なのに，スレスレに潜り抜けていくスリットが単純ではない曲線だったからである．＜スレスレ 2＞は C_2が複雑な曲線であり，それが複雑な形のスリットをスレスレに潜り抜けて行っても，それ程の面白さや驚きはないかもしれない．

単純図形が回転するスレスレとして，円を回転させてみる．右上図**＜スレスレ 3＞**は，回転軸に平行で回転軸とは交わらない平面上に存在する円 C_3：$x=\frac{3}{10}(2+\cos t), y=\frac{2}{5}\cos t\,, z=\frac{1}{2}(1+\sin t)$
の回転であり，スリットの形は意外である．この勾玉のような形のスリットは 4 次曲線である．このスレスレの製作は，回転させる円形の輪っかの既製品を探せば，比較的容易だろう（円の位置によっては，スリットが円弧や円になる場合もある）．ただし，スリットが閉曲線なので，大きな穴を開けるしかないという難点があり，円の一部をカットするなどの工夫がいる（図は，円の上部をカットしてある）．

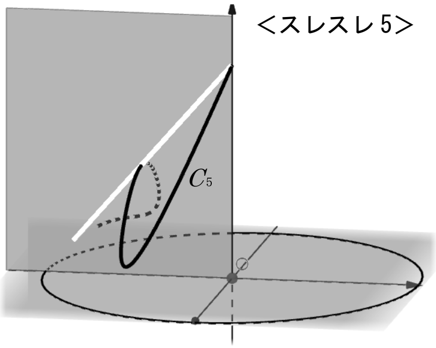


次の興味深いスレスレは，複雑な曲線が単純なスリットをスレスレに潜り抜けていくようなものになる．

最も単純なスレスレのスリットは線分である．右の**＜スレスレ 4＞**は z 軸を軸とする円錐面上の楕円
C_4：$x=\frac{1+2\cos t}{3}, y=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin t\,, z=\frac{2(1-\cos t)}{3}$

が線分のスリットを潜り抜けていく．円錐を表示させなければ，その意外性はさらに強くなる．C_4 は楕円であるというものの，この製作も簡単ではなさそうだ．この設定では，楕円 C_4 の輪っかをあらかじめスリットに通しておく必要もある．

このような円錐面上の曲線は，それが非常に複雑であっても，線分のスリットを潜り抜ける．

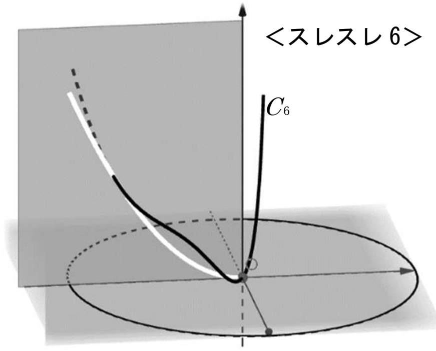


<スレスレ 5>

例えば，図の**<スレスレ 5>**はアクロバティックな曲線 C_5：

$x=\sin t\,, y=e^{-t}\sin 6t,\ z=1-\sqrt{\sin^2 t+e^{-2t}\sin^2 6t}$

が，図のような $x=0, z=y+1$ という直線上の線分スリットを潜り抜けていく．このような方程式を作るのは大変そうだが，回転影の y 座標 Y，z 座標 Z が$Z=Y+1$となるように曲線のパラメータ表示式を設定しただけのことである（もちろん，アクロバティックな曲線になるように試行錯誤はした）．



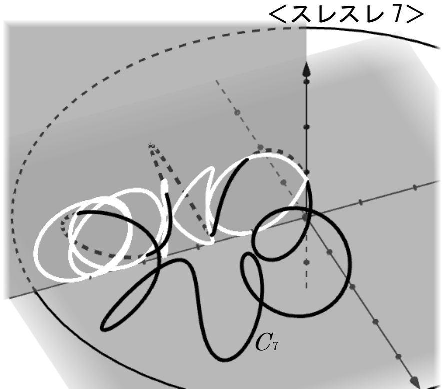
<スレスレ 6>

この方法によって，通り抜けていくスリットが例えば $z=y^2$ となるような空間曲線を逆に作ることも可能である．図の**<スレスレ 6>**は曲線 C_6：

$x=1-\sin t\,,\ y=t\cos t\,, z=(1-\sin t)^2+t^2\cos^2 t$

$(0\leq t\leq 2)$ はそのような例であるが，この曲線の方程式をよく見れば，回転影の座標からの方程式の構成方法が分かるであろう．

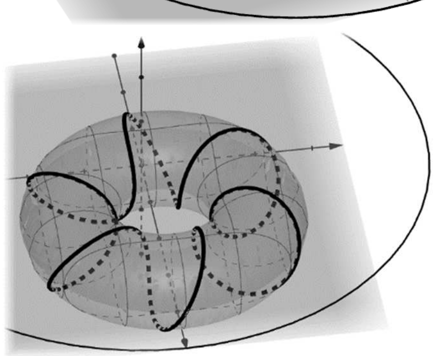
4　スレスレの製作に当たって



<スレスレ 7>

ここまでに載せた図は GeoGebra で実際に空間図形を描き，曲線がスリットを潜り抜けていくアニメーションを製作したものから取ったものであり，GeoGebra ではこのように様々なパターンを製作することが可能である．

方法は，空間内の曲線 $x=f(t), y=g(t), z=h(t)$ $(a\leq t\leq b)$ を描く．スライダー u $\big(t$ は使えない$\big)$ を設定し，z 軸周りにこの曲線を 角 u だけ回転させた曲線を描き，u をアニメーションオンにするだけで，曲線は回転してくれる．ボードのスリットの曲線は，回転影から$x=0,\ y=-\sqrt{\big(f(t)\big)^2+\big(g(t)\big)^2}, z=h(t)$ $(a\leq t\leq b)$ という曲線を（白く）描くだけのことである．



<スレスレ 7>は，右のようなトーラスに巻き付いた曲線 C_7：$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cos t(2+\cos 6t)$,

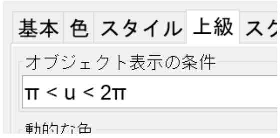
$y=\frac{1}{6}\sin t(2+\cos 6t), z=\frac{1}{6}(1+\sin 6t)$

を回転させた場合であり，スリットも上の方法で描いた．このような複雑な曲線でも図示可能である．

実を言うと GeoGebra で苦労した点は, ボードの設定である. 平面 $x=0$ は簡単に描けるが, これを $y<0$ に制限することが簡単にはできない. そこで, ボードの 4 隅の点を設定して四角形を作成するという, まさにボードを作る手法で切り抜けた.

なお, E テレの動画では, 最初はボードにスリットが表示されていないが, 棒が回転して行って, ボードに突き当たる直前にスリットが現れるという, 期待感ワクワクの動画編集上の工夫がされている.

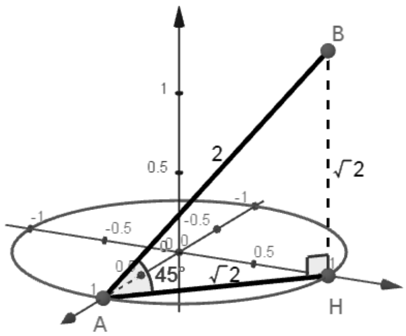
GeoGebra でも, 回転影のスリットの表示を, 最初の棒の回転のスレスレの場合, ボードのオブジェクトのプロパティを（例えば）右のように設定すれば, 同様のワクワクのアニメーションにできる.



工作でこういったスレスレを作るとき, <スレスレ 1>の線分 AB のケースが一番簡単そうに見えるが, 実は棒を回転盤に正しく斜めに固定するのが難しい. B の座標を$(0,1,\sqrt{2})$ に設定し直して, AB=2 に棒を切れば, 木材を 45 度の斜めに切るための補助道具が市販されているので, それを用いて何とか上手くいきそうである. 接着面を斜め 45 度に切った棒 AB を, 直角 2 等辺三角形 AHB に相当する支えを作って接着するまでその斜辺に沿わせて仮止めしておけばよいだろう.

もちろん, スリットの方程式は計算し直す必要があり, 計算すると $2y^2-2\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$ となり, 何ともきれいな双曲線の方程式である（漸近線が直交する）.

さらには, 棒の太さに対応させてスリットの幅を考え, それに対応した曲線でスリットを切り抜いていく必要もあり, 不器用な私には容易ではないと思われる.



5　おわりに

科学館などに, 数学のコーナーが設置されていることがあるが, 物理学や天文学などの他の分野に比べると扱いが小さく, 貧弱であることが多い. 現実の事象をリアルに扱う分野に比べて, 抽象度の高い数学は展示物の考案や製作が難しいためなのかもしれない.

しかし, 少ないながらもこのスレスレのような数学と関連した興味を引く展示物を掘り起こし, その製作を行って展示にこぎつけてほしいものだ. もちろん, 数学との関連を分かり易く補足する必要もあるだろう.

今回示したアクロバティックな空間曲線などは, 現実の製作が難しいのだろうが, 方程式が分かっている曲線なので, 3D プリンタなどを使えば可能なのかも知れない.

かつて, 科学技術振興事業団（2015 年 4 月に国立研究開発法人科学技術振興機構になった）が「サイエンス展示・実験ショー　アイデアコンテスト」を毎年行っていた. 入賞した優秀アイデアは事業団が展示物を試作開発してくれ, 全国の科学館などでの巡回展示が行われた. しかし, 1996 年から始まったこのコンテストも 7 回ほどで打ち切りになってしまい, 現在では行われていないと思われる. こういったアイデアの掘り起こし場面が失われたのは, 残念なことである.

（2022 年 9 月 5 日）