SSH 数学「課題研究」の事前指導とその講評

斎　木　清　治

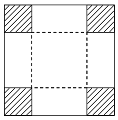
本校は，SSH(Super Science High School)の指定を受けている．最近，SSH では「課題研究」を課すことが指定の条件になっているらしく，指導方法を含め，試行錯誤の中にある．

本校で来年度の理系の 3 年生から始まる最初の「課題研究」に向け，事前指導として理系の現 2 年生の冬休みに「プレ課題研究」と称して，次のような課題を課した．それらのレポートを精読し，「講評」をまとめたので紹介したい．以下の最初の部分が，課題説明として配布したものである．

SSH 数学　冬休み課題（理系）

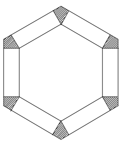
1　できるだけ多くの砂金をゲットしよう

1 枚の小さな厚紙を渡されて,「その紙で箱を作ったら，その箱いっぱいの砂金を入れてあげよう」と言われたら，誰だって，いかに容積の大きな箱にするかを考えるでしょう．



たとえばその厚紙が正方形の紙で,「ふたがなくても良い，4 隅から合同な正方形を切り取って折り曲げて箱を作る」という場合は，数学 II の教科書 p．186 の応用例題 3 に載っていて，3 次関数の微分法の問題として解決できます．

もし，渡されたのが長方形の紙だったらどうでしょう．正 6 角形の紙で同じようなことを考える右図のような問題が，過去の入試で出題されています．



また，ふた付きの箱にするという条件だったらどうなるでしょう．

このように,「1 枚の紙から作る箱の容積最大問題」といっても，紙の形や箱の条件，紙の使い方の条件などで様々な場合が考えられます．

2　「課題研究」の練習をしておこう

3 年生の 1 学期に SSH で,「課題研究」が行われます．これは，数学，理科の内容で研究テーマを設定して研究を進め，まとめを行って発表するというものです．

研究分野の決定は来年 3 月，研究テーマの決定は 4 月早々に行われる予定ですが，いきなり自分で研究テーマを設定することは難しいと予想されます．

そこで，数学の「プレ課題研究」として「課題研究」の練習をしてみましょう．

テーマは自分で独自に設定してもよいのですが，少し難しいと思いますから，とりあえず大きなテーマでは，上に挙げた「箱の容積最大問題」で取り組むことにしましょう．

3　この「プレ課題研究」について

(1)　テーマは各自が自分で独自に決めます．

紙の形を変えてみたり，箱の形を変えてみたり，紙の使い方を変えてみたりすれば，千差万別のテーマが考えられると思います．

単に箱の容積を最大にする方法のみならず，最大になるときの形状や様々な値などに広げて考えて見ることも可能です．

自分の数学の力を勘案しながら，テーマ設定をしてみましょう．

たとえば，先の入試問題で言えば「正 6 角形の厚紙から作る箱の容積最大について」がテーマになります．

(2)　研究の進め方

テーマが決まったら，その問題解決を図ります．
この場合は多くは計算ですが，変数をどう設定したら良いかなど，場合によっては試行錯誤が必要です．その試行錯誤こそ研究で重要な部分ですから，そこを楽しみながら考えてみましょう．

もちろん，必要に応じてコンピュータを使うなどということも，研究の手法としてはアリです．

(3)　研究成果について

研究した結果，明快な結論が得られたら，この上ない喜びです．しかし，どんな研究でもそうですが，思うような結論が得られなかったり，得られた値が非常に複雑だったりなどということは日常ですから，それも 1 つの現実であり，そうだということが分かったということも重要な研究結果なのです．

また，時間的な制約もあります．潤沢に時間を費やせない場合は「とりあえずここまで」として，研究を留め置くことだってあるでしょう．

(4)　結果のまとめについて

得られた成果や，成果が得られなかったとしても「このような計算をして，ここまでは分かった」という事柄をレポートにまとめましょう．まとめていく作業は非常に重要で，その段階で自分の研究の不備や間違いに気づくこともあり，手直しを迫られることもあります．そういった様々な過程を経て，よりよい研究になっていきます．

特に形式は指示しませんから，自由に項目を立てて記載して結構です．

ただ，最初の部分で，どういう条件の問題に取り組んだのかが明確に分けるようにしておく必要はあります．たとえば先の入試問題で言えば次のようになるでしょう．

> 1 辺の長さが a である正 6 角形の厚紙から，図の斜線部を切り取り，6 つの長方形を直角に折り曲げて箱を作るとき，箱の容積が最大になるときの箱の高さについて考える．

必要な図などもきちんと描いてレポートを分かりやすく，見やすいものにしてください．

(5)　かける時間について

3 年生での「SSH 課題研究」では，相当時間をかけ

て研究やまとめを行いますが，今回は冬休みの課題の一環という意味もあり，それほど多くの時間を割くことはできないでしょう．したがって，2 時間程度を充ててもらえば十分です．

その時間をかけたにもかかわらず，思うような成果が得られなかったとしても，「考えたこと」「予想したこと」「計算したこと」「途中までの結果」などでレポートを書けば結構です．

(6) 「課題だから仕方なしにやる」ということでなく，自分で条件を考え自分で考えた問題を研究するプロセスを楽しむことができるといいなあと思います．型どおりでなく，視点を変えたりして興味を持てるテーマ設定での取り組みを期待します． 2014.12.15

SSH 数学　プレ課題研究　講評

1　はじめに

今回の，SSH 数学プレ課題研究では，さまざまなテーマでのレポートが提出された．

テーマ設定として，「1 枚の紙から作る箱の容積最大」を例示し，それ以外でも構わないとした．

提出されたレポートの多くは，容積最大問題関連であった．それ以外のテーマも散見されたが，正直言って興味を引くものは少なかった．

中には，算数的な計算だけで処理できるような内容のものもあって，日頃，疑問に思っていたことの解明という側面もあったりはするのだろうが，一宮高校の高校生のレポートということからは「いかがかな？」と思われる内容のものもあった．

また，インターネットの助けをずいぶん借りたなと思われるレポートもあって，オリジナリティという観点から高くは評価できないと思われるものもあった．課題研究は調べ学習ではないことは，承知しておいてほしい．

こうやって見てみると，テーマ設定がいかに重要かを再認識させられる．

以下では，箱の容積最大問題関連に限定して，コメントする．

2　長方形の紙からつくる箱の容積最大問題

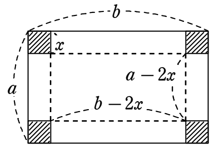
(1)　蓋なしの箱について

「正方形の場合は教科書の例題にある」としたにもかかわらず，正方形の紙での計算をしたレポートがいくつかあったが，論外である．もう少し真摯な取り組みをすべきではないか．

1 辺の長さが a の正方形の場合，4 隅から 1 辺の長さ $\dfrac{a}{6}$ の正方形を切り取ったとき，箱の容積は最大値 $\dfrac{2}{27}a^3$ をとる．

具体的に長方形の 2 辺の長さを与えて計算したレポートもあった．例えば縦 10，横 20 の紙で蓋のない箱を作るときであれば，4 隅から 1 辺 $\dfrac{5(3-\sqrt{3})}{3}$ の長さの正方形を切り取れば容積が最大になるといった具合である．ここで考えるべき問題がある．1 つは「縦 10，横 20」に何らかの必然性があるのかということである．中に「A4 の用紙」で考えた人がいるが，確かに身近にある紙ではあるものの，それ以上にそのサイズである必要性があるのかである．もう 1 つは，このサイズで最大となるときの $\dfrac{5(3-\sqrt{3})}{3}$ の値を見て，こんな複雑な値でないようにサイズ設定を考えることができないだろうかという方向での考察を深めることはできなかったのかということである．

一般的に，縦 a，横 b（便宜的に $0<a\leqq b$ として，正方形も含めておく）の長方形の紙で考えるというのが，順当なアプローチである．



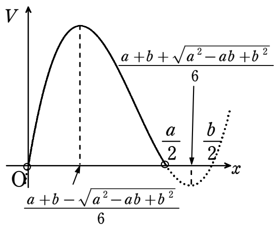
このとき切り取る正方形の 1 辺の長さを x とすると，$0<x<\dfrac{a}{2}$ で，容積 $V=x(a-2x)(b-2x)$ で，$\dfrac{dV}{dx}=0$ とすれば，$12x^2-4(a+b)x+ab=0$ が得られ，これより V は $x=\dfrac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ で極値をとる．

このように取り組んだ多くのレポートはここまで正しくできている．ただ，$x=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ で極大かつ最大となるということをきちんと調べ切れていないレポートも少なくなかった．

ポイントは，

$$0<\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}<\frac{a}{2}<\frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

を示しておく必要があるということであるが，これを示すのは少し大変かも知れない．



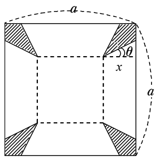
この場合，x の 3 次関数 V のグラフを考えてみるとよい．特に x 軸との共有点を意識してグラフをかけば右のようになり，$x=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ で極大かつ最大になることが分かる．

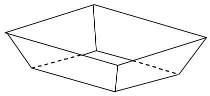
こういった設定で考え，最大を与える x を求めて終わりとするレポートが大半だが，ここから，この複雑な x の値について「これが整数になるような a, b の値はあるのか？」などといった発展も考えられそうだ（面白い結果が待っているが，あえてここには載せない）．

さらにここから，長方形の面積が一定だったら，周長が一定だったら，どういう場合に容積が最大になるのかの考察がいくつかあった．結論はいずれも $a=b$ の正方形の場合だが，面積を計算してさらに微分しての計算は楽ではないため，きちんとした結果はほとんど出せていなかったように思う．

また，折り曲げを直角でないようにしたらどうかと考えた人が数名いる．変数の設定方法によって，容積 V の表し方に難易が分かれる．次の図のように x と θ

で表すのが良いようだが，V に2変数 x, θ を含むため難航する．難しいこともあり，きちんとした結論を出せた人はいなかったものの，試みに拍手である．

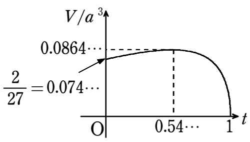




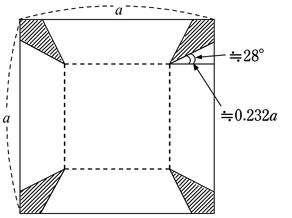
側面の台形は，上底が $a-2x+2x\tan\theta$，下底が $a-2x$，高さが $x\sqrt{1-\tan^2\theta}$ となることから，四角錐台の体積の公式に代入して，容積 V は $\tan\theta=t$ と表して，次のようになる．

$$V=\frac{1}{3}\{(a-2x)^2+(a-2x)(a-2x+2xt)+(a-2x+2xt)^2\}x\sqrt{1-t^2}\ .$$

ただし，$0<x<\frac{a}{2}$，また $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ より，$0<t<1$ である．x と t は独立な変数であるから，V を x で微分して増減を調べ，最大を与える $x=\frac{2-t-\sqrt{1-t}}{2(t^2-3t+3)^2}a$ を V に代入した式（省略）を t で微分して増減を調べ，最大値を求めればよい．



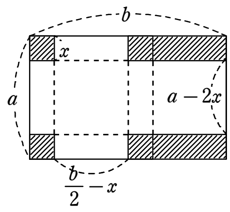
正確な値を求めることは難しいよう（不可能？）なので，グラフを描いてみると右上のようになり，近似的には右下のような値の展開図のとき容積は最大値をとり，最大値は $V=0.0864\cdots a^3$ である．これは直角に折り曲げたときの最大値 $\frac{2}{27}a^3=0.07407\cdots a^3$ の約1.167倍もあって，結構大きい容積になるという興味深い結果である．

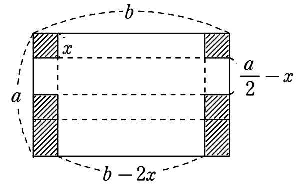


(2)　蓋付きの箱について

長方形の紙で，蓋付きの箱を作る場合について考察してくれたレポートも少なからずあった．

縦 a，横 b（便宜的に $0<a\leqq b$ としておく）の長方形の紙で考えるとき，多くのレポートが指摘しているように，箱について右の展開図のように2つの形が考えられる．

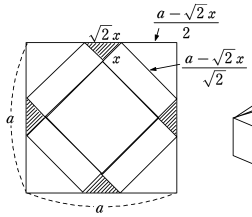


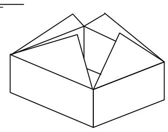


しかし，いずれの場合も容積は $V=\frac{1}{2}x(a-2x)(b-2x)$ となる．x の範囲はどちらも，$0<x<\frac{a}{2}$ かつ $0<x<\frac{b}{2}$ で，$0<a\leqq b$ から $0<x<\frac{a}{2}$ である．

この容積については(1)の蓋なしの場合の半分であるが，容積最大を与える x の値は(1)と同じであるという，興味深い結果となる．

なお，蓋付きで言えば，正方形の紙で右図のような展開図を考えてくれた人がいる．





この場合は，図のような設定で，$V=\frac{x}{2}(a-\sqrt{2}x)^2$ となる．微分して調べると，$x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ で最大値 $\frac{\sqrt{2}}{27}a^3$ をとる．ごく普通の展開図の場合の最大値 $\frac{1}{27}a^3$ の $\sqrt{2}$ 倍もあって，素晴らしい収容能力である．長方形でも同じことができるのかどうか，興味ある人は考えてみて欲しい．

$\boxed{3}$　正多角形の紙から作る箱の容積最大について

正 n 角形の隅から合同な四角形を切り取って垂直に折り曲げ，底面が正 n 角形であるような箱を作る場合については，多くの人がいくつかの n の値の場合を調べていた．

$n=3, 4, 6, \cdots$ という具体的な場合から出発し，一般の n について調べたレポートも少しあった．ここでは，演繹的に一般の n　$(\geqq 3)$からスタートする．

(1)　1辺の長さが a であるとき

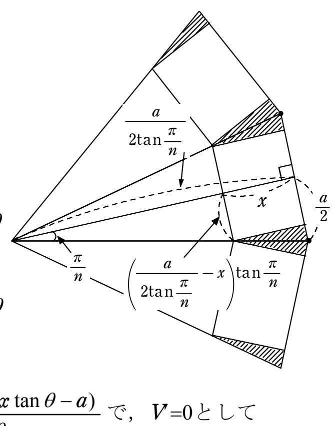
できあがる箱の高さを x とすると，図の斜線部のような四角形を n 個切り取ることになり，底面積 S は，$\theta=\frac{\pi}{n}$ とおくとき，

$$S=n\left(\frac{a}{2\tan\theta}-x\right)^2\tan\theta$$

であるから，容積

$$V=nx\left(\frac{a}{2\tan\theta}-x\right)^2\tan\theta$$

である．



$\frac{dV}{dx}=\frac{n(2x\tan\theta-a)(6x\tan\theta-a)}{4\tan^2\theta}$ で，$V'=0$として

$0<x<\frac{a}{2\tan\theta}$ であることに注意して増減を調べると，

$x=\frac{a}{6\tan\theta}$ のときに V は最大値 $\frac{na^3}{54\tan^2\theta}$ をとる．

$n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$ の場合の最大を与える x と V の最大値は，次のようになる．

n	x	V
3	$\dfrac{\sqrt{3}}{18}a$	$\dfrac{1}{54}a^3$
4	$\dfrac{a}{6}$	$\dfrac{2}{27}a^3$
5	$\sqrt{\dfrac{5}{90}+\dfrac{1}{36}}\,a$	$\dfrac{2\sqrt{5}+5}{54}a^3$
6	$\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$	$\dfrac{a^3}{3}$
8	$\dfrac{\sqrt{2}+1}{6}a$	$\dfrac{8\sqrt{2}+12}{27}a^3$
10	$\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+5}}{6}a$	$\dfrac{10\sqrt{5}+25}{27}a^3$
12	$\dfrac{\sqrt{3}+2}{6}a$	$\dfrac{8\sqrt{3}+14}{9}a^3$

近似値的には次のようになる．

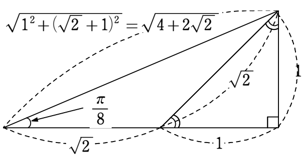
n	x	V
3	$0.0962250\,a$	$0.0185185\,a^3$
4	$0.166666\,a$	$0.0740740\,a^3$
5	$0.229396\,a$	$0.175409\,a^3$
6	$0.288675\,a$	$0.333333\,a^3$
8	$0.402368\,a$	$0.863470\,a^3$
10	$0.512947\,a$	$1.75409\,a^3$
12	$0.622008\,a$	$3.09515\,a^3$

このように，n の値が増えるに従い正 n 角形自体も大きくなっていくこともあり，当たり前だが容積は急増する．

レポートは，$n=6$ の入試問題を取り扱ったものもあったが，自分で条件設定をしてみるという意味では不十分なレポートである．

$n=3,\ 5,\ 8$ の場合についての検証レポートが多くあった．ただ，$n=5,\ 8$ の場合の三角比では近似値を用いたレポートもあり，ここは真の値で頑張りたいところだ．

$\dfrac{\pi}{12}$ の三角比の値については，例えば $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ と加法定理から求めればよい．$\dfrac{\pi}{8}$ のそれらについては，半角公式や，右図のような直角三角形を利用してもよい．



$\dfrac{\pi}{5}$ についてはやや難しいが，$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ とすると，$3\theta=\pi-2\theta$ であるから，$\cos 3\theta=\cos(\pi-2\theta)=-\cos 2\theta$ であり，3 倍角などの公式により，

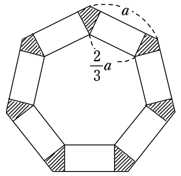
$4\cos^3\theta-3\cos\theta=1-2\cos^2\theta$ となり，

$(\cos\theta+1)(4\cos^2\theta-2\cos\theta-1)=0$ から求めることができる．

他の三角比の値についても同様である．

多くのレポートは箱の高さを x としていたが，$\{a-(\text{底面の 1 辺の長さ})\}/2=y$ を変数とした人が数名いる．$y=x\tan\theta$ である．これで計算すると，容積が最大になるのは

$y=\dfrac{a}{6\tan\theta}\cdot\tan\theta=\dfrac{a}{6}$ のときである!!　つまり，容積を最大にするには，元の正 n 角形の辺の長さの両側から $\dfrac{1}{6}$ ずつ短くすれば良く，できあがる箱の底面は 1 辺が元の正 n 角形を $\dfrac{2}{3}$ に縮小したものになるという，素晴らしく美しい結果となる．これが，どのような n $(\geqq 3)$ でも成り立つのだから，驚きの結果である．



正 n 角形の面積を一定にして考えたレポートもあったが，一般の場合まで調べ切れたレポートはなかったように思う．

中に，この正多角形が，一定の長さの半径の円に内接する場合に言及したレポートがあって，なかなかよい条件設定である．この設定について，次に述べる．

(2)　一定の長さの半径の円に内接するとき

この正 n 角形が半径 r の円に内接するとすれば，$a=2r\sin\theta=2r\sin\dfrac{\pi}{n}$ であるから，$x=\dfrac{r}{3}\cos\dfrac{\pi}{n}$ のとき，最大値 $V=\dfrac{4nr^3}{27}\cos^2\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$ をとることになる．

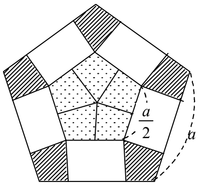
この場合の，$n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12$ の場合の最大を与える x と V の最大値は，次のようになる．

n	x	V
3	$\dfrac{r}{6}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{18}r^3$
4	$\dfrac{\sqrt{2}}{6}r$	$\dfrac{4\sqrt{2}}{24}r^3$
5	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{12}r$	$\dfrac{5\sqrt{2\sqrt{5}+5}}{54}r^3$
6	$\dfrac{\sqrt{3}}{6}r$	$\dfrac{r^3}{3}$
8	$\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{6}r$	$\dfrac{4\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{27}r^3$
10	$\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}+10}}{12}r$	$\dfrac{5\sqrt{5}}{27}r^3$
12	$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}r$	$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{9}r^3$

近似的には次のようになる．

n	x	V
3	$0.166666\,r$	$0.0962250\,r^3$
4	$0.235702\,r$	$0.209513\,r^3$
5	$0.269672\,r$	$0.284970\,r^3$
6	$0.288675\,r$	$0.333333\,r^3$
8	$0.307959\,r$	$0.387129\,r^3$
10	$0.317018\,r$	$0.414086\,r^3$
12	$0.321975\,r$	$0.429300\,r^3$

なお，ここで $n\to\infty$ とすると，$x\to\frac{r}{3}$，$V\to\frac{4\pi}{27}r^3$ となる．きわめて円に近い正多角形では，外接円の直径の $\frac{1}{6}$ を高さとすれば容積が最大になるということを示していて，正方形の場合に 1 辺の長さの $\frac{1}{6}$ を高さとすれば容積最大になるという事実と照らして，興味深い結論である．



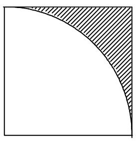
一般の正 n 角形で蓋付きの箱をつくることについては，展開図をどうするかが絡んで難しい．

しかし，次のようなことを考えてくれたレポートがある．図のように，正 n 角形（図は $n=5$）で元の正 n 角形の長さを半分にした正 n 角形を底面とするとき，切り取った n 枚の 4 角形（斜線部）をセロハンテープで貼り合わせれば，底面（打点部）と合同な正 n 角形ができるから，これを蓋にすれば，高さが $\frac{a}{4}$ の蓋付きの箱ができるという．最大値とは直接関係しないが，材料を使い切るという点では面白い．

なお，一般の三角形の紙で考察したレポートは，残念ながらなかった．問題はさらに，一般の凸多角形の紙で考察することが出来て，容積が最大となる場合の底面積と側面積のきれいな関係が明らかにされているが，あえてここでは述べない．興味ある人は考えてみよう（立式が難しい）．

$\boxed{4}$ 箱の容積最大についての他の条件設定から

他の条件設定で容積最大問題を考えたレポートもいくつかあった．いくつかを紹介し，コメントしたい．

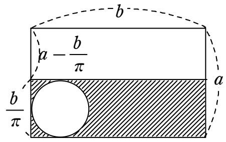


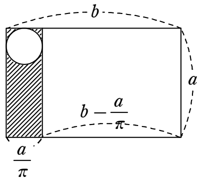
(1) 正方形の紙から円錐の容器を作ろうと考えたレポートがある．ただ，これは正方形の 1 辺の長さ a に対して容積 $V=\frac{\sqrt{15}}{64}\pi a^3$ が 1 つ確定するので，容積の最大問題ではない．ただ，これが直方体の箱の容積の最大値 $\frac{2}{27}a^3$ と比較して，

$0.190\cdots a^3=\frac{\sqrt{15}}{64}\pi a^3>\frac{2}{27}a^3=0.074\cdots a^3$ であり，格段に大きな容積であることは面白い．もっとも，支持体がないと容積の用をなさないが⋯．

(2) 長方形の紙で円柱を作ることを考えたレポートもある．ただ，これも 1 つの長方形に対して 2 通りの円柱が確定する場合があるだけなので，容積の最大問題とは若干論点が異なる．

2 つ確定するときの展開図は次の通りで，このような 2 つの円柱が存在するのは，$0<a<b$ の場合，$\frac{b}{\pi}<a<\pi b$ から，$\frac{b}{\pi}<a<b$ に限られる．





$0<a\leqq\frac{b}{\pi}$ の場合は上の展開図は存在しない．

上の展開図からできる円柱の容積 $V_1=\frac{b^2}{4\pi}\left(a-\frac{b}{\pi}\right)$ と，下のそれからできる容積 $V_2=\frac{a^2}{4\pi}\left(b-\frac{a}{\pi}\right)$ に対して，

$$V_2-V_1=\frac{(b-a)\{a^2-(\pi-1)ab+b^2\}}{4\pi^2}$$

であるから，$\frac{b}{\pi}<a<b$ を考慮に入れて，

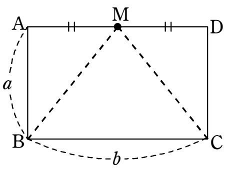
$$\frac{\pi-1-\sqrt{\pi^2-2\pi-3}}{2}b<a<b\quad(0.6879\cdots b<a<b)$$

のとき $V_1>V_2$ となる．

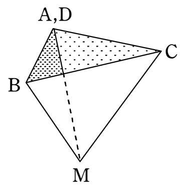
例えば，$b=2a$ の場合は，$V_1<V_2$ である．

こういった論証にまで踏み込んだレポートは，残念ながらなかった．

(3) 次のような内容の，非常に興味深いレポートもあった．



長方形 ABCD の辺 AD の中点 M をとり，線分 BM，CM を谷折りして AM と DM を接着し，三角錐 M-ABC を作る．



このような容器ができるためには，組み立てたときに△ABC が存在するための条件（a,a,b を 3 辺とする三角形が存在する条件）から $2a>b$ である．

この容積は△BCM を底面としたときの高さが $\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4a}$ となり，容積は $V=\frac{b^2}{24}\sqrt{4a^2-b^2}$ である．これも（条件を満たす）長方形から確定する 1 つの形であり，したがって容積は確定する．さらに言えば，支持体が必要な容器である．

ここで，この長方形 ABCD の面積が一定であるという条件を付け加える．$ab=k^2$ とすると，

$V=\frac{k^4\sqrt{4a^2-k^4}}{24a^3}$ となり，$\frac{dV}{da}=\frac{k^4(3k^4-4a^4)}{24a^4\sqrt{4a^2-b^2}}$ から，$a^4=\frac{3}{4}k^4$，$b^4=\frac{4}{3}k^4$ のとき V が最大になる．

このとき，$a:b=\sqrt{3}:2$ となる．

この設定は，一定の材料を長方形の薄い板状にして，（材料を無駄にすることなく）上のように組み立てて容器を作るとき，できるだけ容積を大きくしたい場合は，上のように $\sqrt{3}:2$ の比の長方形にして容器を作ればよいということを教えてくれる．

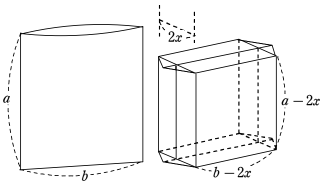
このように，ある（意味のある）条件を付け加えて，その条件下での最大や最小を考えるということは意義

深いことであり，面白く興味深い結論が得られることがある．

(4)　次のような内容のレポートも，ある条件下での最大問題と言えるが，中には問題集に載っているような内容も含まれている．

・表面積が一定である正四角錐の体積の最大
・表面積が一定である円錐の体積の最大
・表面積が一定である直方体の体積の最大
・球に外接する円錐の体積の最大
・辺の長さの和が一定である立体（直方体や四角錐）の体積最大
・長方形の袋の中に入れることのできる直方体の体積の最大

これは，マチのない縦 a，横 b の長方形の袋に，右図のように直方体をピッタリ入れるというものである．



$V=2x(a-2x)(b-2x)$ で，長方形の箱から蓋のない箱を作るときの体積の 2 倍になっているだけであるから，$x=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ のとき V は最大となる．よく考えれば当たり前のことではあるが，箱作りと同じ事象であることが面白い．

$\boxed{5}$　終わりに　―本格的な課題研究に向けて―

いよいよ 4 月から始まる『課題研究』に向けて，今回の「プレ課題研究」から学ぶべきことを指摘しよう．

すでに指摘したように，具体的な長さの長方形，正方形で箱の容積最大を計算した人が，少なからずいる．結果が得られたとして，そこから何を学ぶことができただろうか？

例えば，縦 10cm，横 20cm の場合に，1 辺が $\dfrac{5(3-\sqrt{3})}{3}$ cm の正方形を切り取ればよいと分かっても，縦横の長さが別の値だったらどうかは，また一から計算し直さなければならない．

縦 a，横 b の長方形で計算して，1 辺が $\dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ の正方形を切り取ればよいとすれば，様々な場合に使えるし，長方形の辺の長さがどのようにかかわっている値なのかも見えるはずである（ちなみに $\sqrt{a^2-ab+b^2}$ は，△OAB において，OA＝a，OB＝b，∠AOB＝60°のときの AB の長さである）．一般化した結果に「なるほど」という学びや「へえー」という驚きがある．

また，正 n 角形を考えた人の多くが，$n=3, 4, 5, \cdots$ などのケースを調べたレポートにしている．1 つのケースで終わらせていないという点では評価できる部分があるが，こういった「実験」を通して，一般の n の場合に飛躍できていない人が多いのは残念である．一気に n のケースが難しいとき，具体的な値で実験してみるというのは重要な手法であるが，それらを手がかりにして一般のケースまで高めていく力を養いたいものだ．一般のケースでの結果を見れば，そこから，$n \to \infty$ にしてみようとか，側面積との比を考えてみようなどといった発展につながっていく可能性がある．

さらに，ある意味のある条件を設定して，その中で考えてみることも重要である．今回の正 n 角形での場合で言えば，1 辺の長さが一定の a であるという条件を，一定半径の円に内接させるとか，多角形の面積を一定にして考えてみようなどといった，他の条件に代えて考えてみると面白い結果が得られた．

「1 枚の紙から作る箱の容積最大」というテーマでも，これだけ様々な観点で考察することができ，奥が深いものであることに驚く．単に計算するだけでなく，あれこれ考え，計算し考察する喜びも，課題研究の魅力である．

今回は十分な時間がない中での取り組みだったので，不十分なものがあっても致し方ない．しかし，その中にあって多くの生徒がこの課題に取り組み，なかなか興味深い設定で考察を深めたレポートも少なからずあったことは心強く，うれしい．

4 月からの『課題研究』では，奥の深いテーマを設定し，そのテーマに柔軟な思考で多面的にアプローチし，独創的な研究が進められることを期待したい．

2015.1.27

＜斎木＞

「課題研究」は，自分で研究テーマを探し，それを解明するということに主眼がある．そのため，研究課題を与えてしまっては意味がない．とは言え，自分でそれなりのテーマを探せる生徒がどれだけいるだろうかというのが，指導する立場の大きな不安要因である．今回，「箱の容積最大」以外をテーマとしたレポートでは，（途中段階での指導がなかったことも原因として考えられるが）残念ながらテーマの深みにも欠け，内容の広がりも余りないものが大半であった．

一方，大枠のテーマ「箱の容積最大」の中で自己設定した研究テーマでは，長さを適当に設定した長方形で計算したような稚拙な取り組みしかできなかった生徒も少なくはない現実があるものの，「講評」に取り上げたような柔軟で面白みのあるテーマや条件設定での取り組みも目立った．それだけ魅力的な大枠テーマだったといえる．

今回の事前指導から，今後の本格的な「課題研究」のテーマ設定の指導にあたって，「大枠のテーマをいくつか提示する」という方式の妥当性が確認できたのではないかと考えている．そのために，いくつかの興味深い大枠テーマ探しが急務である．

愛知県立一宮高等学校勤務（執筆時現在）

＜Prior guidance and its review of SSH mathematics "challenge study"；Seiji Saiki＞　2015/1/28