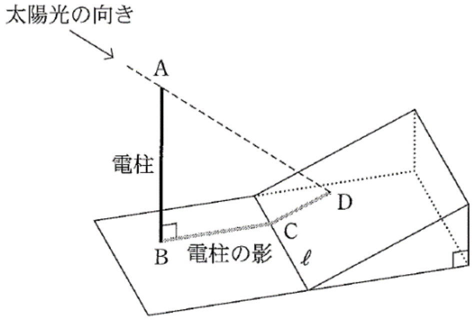
坂道の影長からの求値

斎 木 清 治

1　はじめに

2024 年の共通テスト数学Ⅰ・A 第 1 問〔2〕において，坂道にできた電柱の影の長さから，電柱の高さを求めたりする内容の出題があった．
この問題について，若干の考察を試みる．

2　共通テスト問題の考察



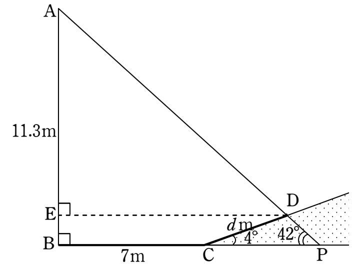
右図のような状態で，BC⊥ℓ，CD⊥ℓである．
坂道の傾斜が道路標識から 7%，BC=7m，CD=4m，太陽高度が 45°であるとき，AB の長さを(三角比の表なども利用して)約 11.3m と求めさせる．
次いで，太陽高度が 42°のときの CD の長さを求める式を，

$$\mathrm{CD}=\frac{\mathrm{AB}-\boxed{\text{テ}}\times\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}+\boxed{\text{ニ}}\times\boxed{\text{ト}}}\ \mathrm{m}$$

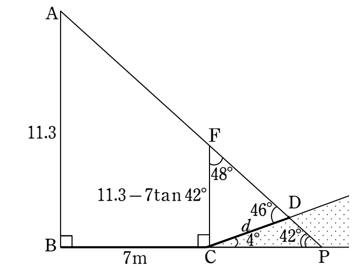
の形で尋ねている．ここで，**ト～ニ**は次の選択肢（重複選択可）から選ぶ．

⓪ $\sin\angle\mathrm{DCP}$	① $\cos\angle\mathrm{DCP}$	② $\tan\angle\mathrm{DCP}$
③ $\sin 42^\circ$	④ $\cos 42^\circ$	⑤ $\tan 42^\circ$

なお，P は直線 AD と地面の交点であり，∠DCP=4°とすでに求まっている．



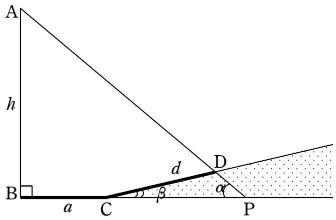
この CD=d m を求める式を考える方法はいくつかある．
AB=11.3 を AE+EB として考えてみると，EB= $d\sin 4^\circ$は容易に分かる．
AE=DEtan42°=$(7+d\cos 4^\circ)\tan 42^\circ$から
$(7+d\cos 4^\circ)\tan 42^\circ + d\sin 4^\circ = 11.3$　より
$d=\dfrac{11.3-7\tan 42^\circ}{\sin 4^\circ+\cos 4^\circ \tan 42^\circ}$　となる．



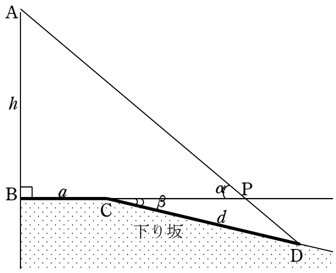
△CPD で∠CDP=134°であるから正弦定理を用いて，
$\dfrac{d}{\sin 42^\circ}=\dfrac{11.3/\tan 42^\circ-7}{\sin 134^\circ}$ となるから
$d=\dfrac{(11.3/\tan 42^\circ-7)\sin 42^\circ}{\sin 134^\circ}$ としてもよい．
あるいは，右下の図の△CDF で正弦定理により
$d=\dfrac{(11.3-7\tan 42^\circ)\sin 48^\circ}{\sin 46^\circ}$ とすることも可能である．
後から求めた 2 式は，最初の式と見かけが異なるが，例えば
$\sin 46^\circ=\sin\ 4^\circ+42^\circ\ =\sin 4^\circ\cos 42^\circ+\cos 4^\circ\sin 42^\circ$ などといった加法定理の助けを借りれば，す

べて同値な式であることを確認できる（三角比，三角関数では非常によくあることで，見かけが違っても同じ式）.
とは言うものの，解答時間の厳しい試験で，異なるアプローチで得られる異なるフォーマットに対して，1 つのみを正答として問う設問はいかがなものかと思う.

3　算出しづらい値を求める



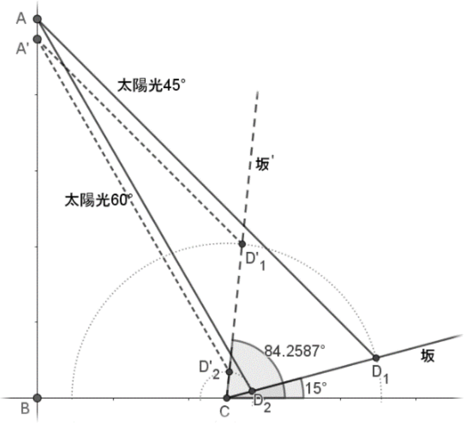
少し一般化し，太陽高度が α，坂道の傾斜角が β，AB=h, BC=a, CD=d とすると，ここまでの結果から，
$h=(a+d\cos\beta)\tan\alpha+d\sin\beta$ より
$h=a\tan\alpha+d(\sin\beta+\cos\beta\tan\alpha)$である.



なお，参考までに坂が下り坂のときは，
$h=a\tan\alpha+d(-\sin\beta+\cos\beta\tan\alpha)$ となるが，以下においてはすべて登り坂とする.

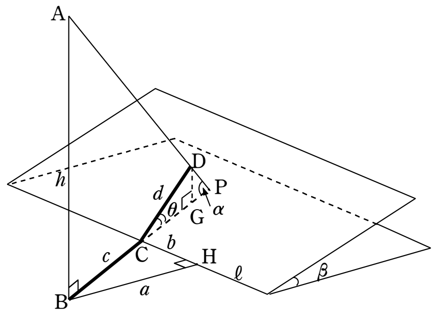
ここで，この現場に似たリアルな場所を考えてみる.
特殊な計測機器がない状況で，どういった値の計測が一番難しいだろうか.
a, d は巻き尺で計測可能，$\tan\alpha$ は長さが分かっている棒を平面に垂直に立てた影の長さから分かる．計測が難しいのは，電柱の高さ h と坂道の傾斜角 β であろうか．傾斜表示のある道路標識を持つ坂は少ない.
異なる 2 回の観測により
$h=a\tan\alpha_1+d_1(\sin\beta+\cos\beta\tan\alpha_1)$，　$h=a\tan\alpha_2+d_2(\sin\beta+\cos\beta\tan\alpha_2)$
が得られたとき，
$$\cos\beta=\frac{a(d_1\tan\alpha_2-d_2\tan\alpha_1)-h(d_1-d_2)}{d_1d_2(\tan\alpha_1-\tan\alpha_2)}$$
$$\sin\beta=\frac{a\tan\alpha_1\tan\alpha_2\ \ d_2-d_1\ \ +h(d_1\tan\alpha_2-d_2\tan\alpha_1)}{d_1d_2(\tan\alpha_1-\tan\alpha_2)}$$
であるから，これを$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ へ代入すると，h の 2 次方程式（非常に煩雑なので，ここには記さない）が得られる.
この 2 つの解のうち，$\sin\beta>0$，　$\cos\beta>0$ を満たすものが電柱の高さ h であり，それに対する $\sin\beta$，　$\cos\beta$ の値から坂道の傾斜角 β が求まることになる.

具体的な値での計算結果を載せる.
設定として，h=10, a=5, $\alpha_1=45°$, $\alpha_2=40°$, $\beta=10°$ として，GeoGebra で作図してみると，$d_1\approx4.3161$，$d_2\approx5.8045$ となった．ここで，　h, β を未知であるとして上記の通り$\cos\beta,\sin\beta$を h の式で表し，$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ へ代入して 2 次方程式を解いた解が，$h\ \approx10,\ 5.62348$ である.
h=10 のとき，$\cos\beta\approx0.984792$ で，$\beta\approx10.0051°$；
h=5.62348 のとき，$\cos\beta\approx-0.631187$ となるから，確かにほぼ h=10, $\beta=10°$ であるという解が得られた.
ただし，別の設定 h=10, a=5, $\alpha_1=45°$, $\alpha_2=60°$, $\beta=15°$として計算すると，
h=10, $\beta=10°$ 以外の組として $h\approx9.47044$, $\beta\approx84.2587°$ （図の「坂′」: 坂でなく，もはや絶壁である）の組も得られる．このように，条件によ



っては 1 組に限定されない可能性があることに注意が必要である．

4　さらなる一般化の可能性を探る



ここまでの設定は，電柱の影がℓに垂直であるという条件下であるが，それだと 1 日にたった 1 回しかないそのタイミングを狙っての計測になる．2 回の計測であれば，1 日では終了しないことになる．

そこで，電柱の影がℓに垂直ではない右図のような一般的な状態での計測と値の算出を考えてみる．

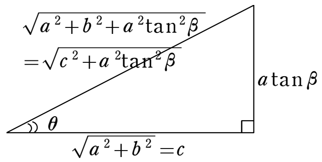
BH=a とし，影が折れ曲がる点 C に対して，BC=c，CH=b $\left(\text{したがって，} a^2+b^2=c^2\right)$，CD=$d$ である．

線分 CD の地面への正射影が CG であり，$\angle$DCG=θ とする．

計測値は a，c，d，α で，求値は h，β とするが果たして可能なのか．

ここでは，θ の値が重要である．これを求めるために，H を原点，直線 HB を x 軸，直線 HC を y 軸とする空間座標を設定する．

B $-a,\ 0,\ 0$, A $-a,\ 0,\ h$, C $0,\ b, 0$ とすると，坂の平面の方程式は$z=(\tan\beta)x$ であり，その法線ベクトルは $n=\ \tan\beta, 0, -1$ である．また平面 ABC の方程式は$\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{b}=1$ であり，その法線ベクトルは $\overrightarrow{m}=\ b, -a,\ 0$ である．この 2 平面の交線である直線 CD の方向ベクトル v は $n,\ \overrightarrow{m}$ に垂直であることから，$v=(a,\ b,\ a\tan\beta)$ とすることができ，$\overrightarrow{\mathrm{CG}}//u=(a,\ b,\ 0)$ である．



したがって，$\tan\theta=\dfrac{a\tan\beta}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{a\tan\beta}{c}$の関係があることが分かる．

すると，$h=d\sin\theta+(c+d\cos\theta)\tan\alpha$ であるから

$$h=\frac{ad\tan\beta}{\sqrt{c^2+a^2\tan^2\beta}}+\left(c+\frac{cd}{\sqrt{c^2+a^2\tan^2\beta}}\right)\tan\alpha$$ が成り立つ．

2 回の c，d，α の測定値 c_1，d_1，α_1; c_2，d_2，α_2 から得られる 2 式の h を等置すると

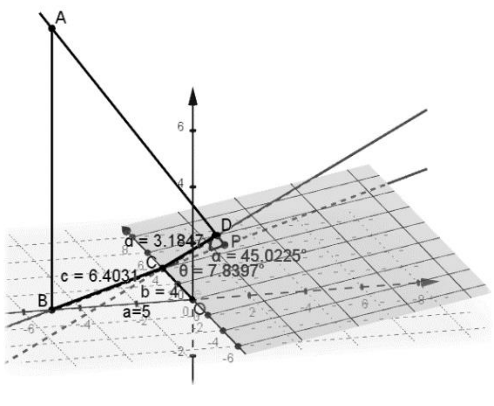
$$\frac{ad_1\tan\beta}{\sqrt{{c_1}^2+a^2\tan^2\beta}}+\left(c_1+\frac{c_1d_1}{\sqrt{{c_1}^2+a^2\tan^2\beta}}\right)\tan\alpha_1=\frac{ad_2\tan\beta}{\sqrt{{c_2}^2+a^2\tan^2\beta}}+\left(c_2+\frac{c_2d_2}{\sqrt{{c_2}^2+a^2\tan^2\beta}}\right)\tan\alpha_2$$

となるが，これから$\tan\beta$ を求めることが出来れば目的達成であるが…．

この方程式は，$a\tan\beta=X$ として少し単純化した形にすると

$\dfrac{AX+C}{\sqrt{B+X^2}}+D=\dfrac{A'X+C'}{\sqrt{B'+X^2}}$ の形になるが，分母を払い移項などして両辺を平方するなどの式変形をすると，非常に高次の(8 次？)方程式になってしまい，代数的に方程式を解くような解法は見込めないようである．

したがって，解析的に近似解を解くしか手がないように思われる．

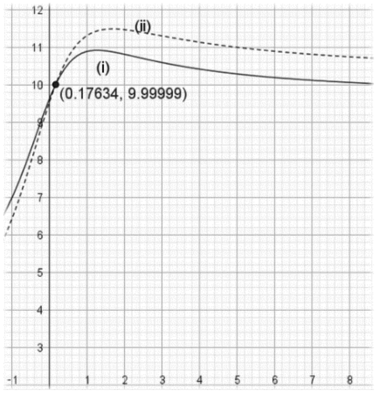


ここでも，GeoGebra の作図例からの数値で計算してみる．

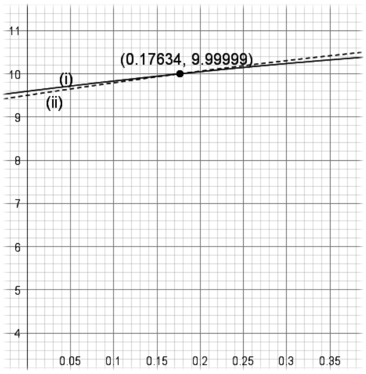
h=10, a=5, $\beta=10°$ として，次の 2 つの例を得た．

(i) $b_1=4,\ c_1=\sqrt{41},\ d_1=3.1847,$
$\alpha_1=45.0225°$ (右図の状態)；

(ii) $b_2 = 5,\ c_2 = 5\sqrt{2},\ d_2 = 4.2484,\quad \alpha_2 = 40.0106°$



これによって近似計算すると(数式処理ソフト DERIVE による)，$\tan\beta \approx 0.176345$ から $\beta \approx 10.0010°$，$h \approx 10$となり，適切な近似解が得られた．
グラフで見てみると，$\tan\beta = x$ として
$$y = \frac{adx}{\sqrt{c^2 + a^2x^2}} + \left(c + \frac{cd}{\sqrt{c^2 + a^2x^2}}\right)\tan\alpha$$
の，2 つの(i)のケースが実線；(ii)のケースが破線である．
下は交点付近のクローズアップであり，GeoGebra による．
グラフの交点座標も GeoGebra によるものである．



このようにしてみると，こういった一般的な状態での求値は容易でないことが分かる．
しかし，GeoGebra などによってグラフの表示，交点の座標表示が容易にできる昨今，こういったソフトを使えばできない話ではない．
そもそも，このケースでは有効数字が 3 桁程度の話であるから，これで十分な近似解が得られる．

5　おわりに

リアルの現場では平坦な地面から徐々に傾斜をつけて坂を作るのが一般的だから，ℓがこのように鮮明であるような坂道は余りないというのが現実ではある．
可能性と方法を探るという方針での考察であるが，瓢箪から駒，何かの場面で使えることがあるかも知れない．

(2024 年 2 月 22 日)