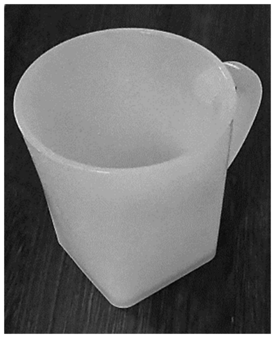
底面が正方形で上面が円である立体の体積

斎 木 清 治

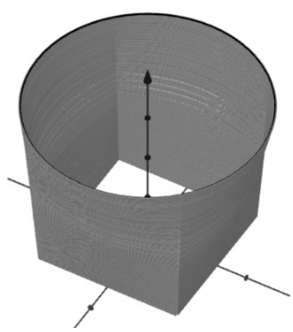
1　はじめに



某 100 円均一ショップで過日売られていた洗面カップ．取っ手を外すと，底面が正方形，上面が円で，水平断面は滑らかに形状変化している．こういった立体図形の体積を求めることができるだろうか．

底面が 1 辺の長さ $2a$ の正方形で, 上面が半径 r の円になっている高さ h の立体の体積 V を求めてみる．

2　体積の概算



このような場合，とりあえず，次のような方法で概算するのではないか.

もしこれが正 4 角錐台であるとしたら，上面が面積 πr^2の正方形，すなわち 1 辺が$\sqrt{\pi}r$ の正方形である．この場合の体積は

$V_1 = \dfrac{h}{3}(\pi r^2 + 4a^2 + 2\sqrt{\pi}ar)$ である．

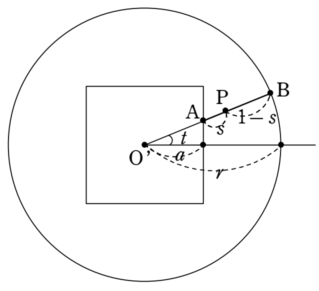
一方，これが円錐台であるとしたら，底面が面積 $4a^2$ の円，すなわち半径が $\frac{2a}{\sqrt{\pi}}$ の円である．この場合の体積は

$V_2 = \dfrac{\pi}{3}\left(r^2 + \dfrac{4a^2}{\pi} + \dfrac{2ar}{\sqrt{\pi}}\right)h = \dfrac{h}{3}(\pi r^2 + 4a^2 + 2\sqrt{\pi}ar)$ であり，V_1 に等しい.

一般に錐台の体積が,「体積$=\frac{1}{3}$\{底面積+上面積+(底面積と上面積の相乗平均)\}×高さ」で計算できることから，$V_1 = V_2$ となるのは当然のことである．

V はこの体積に近い値になると考えればよいだろう．

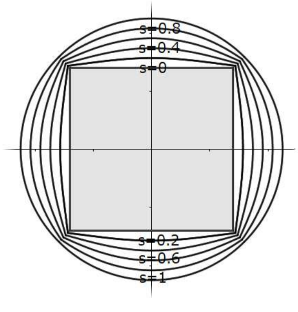
3　設　　定

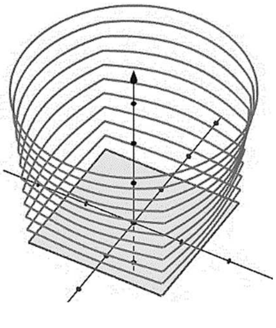


底面の正方形の 1 辺の長さを $2a$, 上面の円の半径を r , 高さを h とする．

中間部分は，例えばちょうど真ん中の高さでは，中心から見て正方形と円のちょうど真ん中の点を結ぶような曲線が断面であると設定する．

厳密には, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ として, 平面 $z = sh$ 上では右上図のような点 P を考え，同様にして t の範囲を$0 \leq t \leq 2\pi$ に区分的に広げて考えた点 P の軌跡で囲む曲線が断面であるとする．





P の t $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{4})$ に対するパラメータ表示は

$x = (1-s)a + sr\cos t,$
$y = (1-s)\,a\,\tan t + sr\sin t,$
$z = sh$

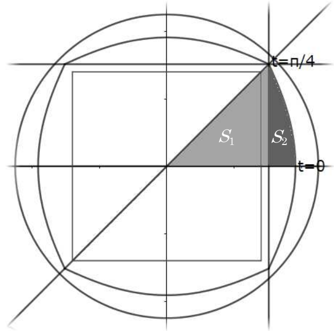
であることが容易に分かる．

この軌跡の xy 平面への正射影は，$s=0\sim1$ について 0.2 刻みで前頁下図左のようになる．s の増加に従い，中央の正方形から外の円へと変形していく．

立体の見取り図的には前頁下図右のようになる（ s は 0.1 刻み）．

4　体積計算

右図が平面 $z=sh$ での断面であり，グレーの部分がその全体の 1/8 である．



薄いグレーの直角 2 等辺三角形の等辺の長さは x または y において $t=\dfrac{\pi}{4}$ として$(1-s)a+\dfrac{\sqrt{2}rs}{2}$ であるから，その面積は　$S_1=\dfrac{1}{2}\left((1-s)a+\dfrac{\sqrt{2}rs}{2}\right)^2$　である．

この分の体積合算は，これを$s=0\sim1$ の範囲で積分し，高さ h を掛ければよい．すると次のようになる．

$$V_1=h\int_0^1\frac{1}{2}\left((1-s)a+\frac{\sqrt{2}rs}{2}\right)^2ds=\frac{(2a^2+\sqrt{2}ar+r^2)h}{12}.$$

濃いグレーの部分の面積は，$dx=-rs\ \sin t\ dt$ から

$$S_2=\int_{(1-s)a+\frac{\sqrt{2}rs}{2}}^{(1-s)a+rs}ydx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\big((1-s)\,a\,\tan t+sr\sin t\big)\,(-rs\ \sin t)dt$$

$$=s(1-s)\ln(\sqrt{2}+1)ar+\frac{\sqrt{2}s(1-s)ar}{2}+s^2r^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)$$ となる．

この分の体積合算は，これを$s=0\sim1$ の範囲で積分し，高さ h を掛けて

$$V_2=h\int_0^1\left\{s(1-s)\ln(\sqrt{2}+1)ar+\frac{\sqrt{2}s(1-s)ar}{2}+s^2r^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\right\}ds$$

$$=\frac{h}{24}\{4\ln(\sqrt{2}+1)\ ar-(2\sqrt{2}a+(2-\pi)r)r\}$$ となる．

V_1+V_2 を 8 倍すると，次のような比較的単純な式が得られる．

$$\boldsymbol{V=\frac{h}{3}\{\pi r^2+4a^2+4\ln(\sqrt{2}+1)\ ar\}}.$$

言うまでもなく， πr^2 は上面積，$4a^2$ は底面積である．

概算で求めた $V_1=\frac{h}{3}(\pi r^2+4a^2+2\sqrt{\pi}ar)$ と比べると， ar の係数に相違があり，$4\ln(\sqrt{2}+1)\approx3.52549<\ 2\sqrt{\pi}\approx3.54490$ の関係がある．

したがって， **2** で求めた概算値はこれより若干大きいものの，概算値としてはまあ優秀であったと言ってよいだろう．

5　底面を正 n 角形にすると

同様の方法で，底面を正 n 角形に一般化してみる．このとき，底面の正 n 角形は 1 辺の長さ指定ではなく，外接円の半径が a であるとするのが良かろう．

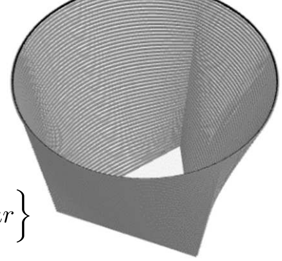
$0\le s\le1,\ 0\le t\le\frac{\pi}{n}$ として，P の t $(0\le t\le\frac{\pi}{n})$ に対するパラメータ表示は

$x=(1-s)a\ \cos\dfrac{\pi}{n}+sr\cos t,y=(1-s)\,a\ \cos\dfrac{\pi}{n}\ \tan t+sr\sin t,z=sh$　となる．

4 の場合と同様の計算により（途中計算式を省くが），底面が正 n 角形の場合の体積 $V(n)$ は最終的に次のようになる．

$$\boldsymbol{V(n)=\frac{h}{3}\left\{\pi r^2+a^2 n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}+n\cos\frac{\pi}{n}\ \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2n}\right)\right)ar\right\}}\quad \cdots\cdots(*)$$

具体的な n に対する式をいくつか載せると次のようになる．



$$V(3)=\frac{h}{12}\{4\pi r^2+3\sqrt{3}a^2+6\ \ln(\sqrt{3}+2)ar\}\quad （右図の立体）$$

$$V(4)=\frac{h}{3}\{\pi r^2+2a^2+2\sqrt{2}\ \ln(\sqrt{2}+1)ar\}$$

$$V(6)=\frac{h}{6}(2\pi r^2+3\sqrt{3}a^2+3\sqrt{3}\ \ln 3\ ar)$$

$$V(8)=\frac{h}{3}\left\{\pi r^2+2\sqrt{2}a^2+4\sqrt{\sqrt{2}+2}\ \ln\left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\right)ar\right\}$$

$$V(12)=\frac{h}{3}\{\pi r^2+3a^2+3(\sqrt{6}+\sqrt{2})\ \ln(\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2)ar\}$$

さて，(∗)　式において，$\lim_{n\to\infty}V(n)$ とすれば，円錐台の体積公式に同じになるはずである．

$a^2 n\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}$　の部分については，$n\to\infty$ のとき $\to\pi a^2$ となるのはすぐわかる．

$n\cos\dfrac{\pi}{n}\ \ln\ \left(\tan\dfrac{\pi(n+2)}{4n}\right)$ の部分は，$n\to\infty$ のとき $\to\pi$ となるはずだが….

n を正の実数と見て，ロピタルの定理を用いると，

$$\lim_{n\to\infty}n\cos\frac{\pi}{n}\ \ln\left(\tan\frac{\pi(n+2)}{4n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}\ \ln\left(\tan\frac{\pi(n+2)}{4n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\pi\sin\frac{\pi}{n}\ \ln\left(\tan\frac{\pi(n+2)}{4n}\right)}{n^2}+\dfrac{\pi\cos^2\frac{\pi}{n}}{n^2(\sin\frac{\pi}{n}-1)}+\dfrac{\pi\sin\frac{\pi}{n}}{n^2}}{-\dfrac{1}{n^2}}$$

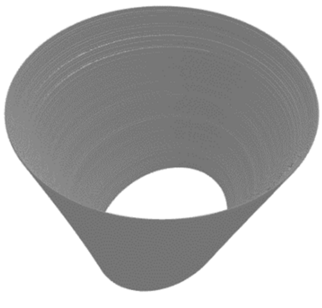
$$=\lim_{n\to\infty}\pi\left\{1-\sin\frac{\pi}{n}\ \ln\left(\tan\frac{\pi(n+2)}{4n}\right)\right\}=\pi$$

となり，確かに円錐台の体積公式に近づくことがわかる．

6　おわりに

このカップを設計するとき，よもやこんな積分計算をして容積を求めたりはしていないだろうが，モノによってはしっかりした計算が必要となる場面もあるのだろう．

3D プリンターなども使える時代，このような複雑な立体図形でもそれを現実の形にし，商品化できると考えられる．そのようなある場面で利用可能な式が得られたことになる．



蛇足的な補足：

底面が楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で上面が半径 r の円といった立体も，同様な方法で考えることができる．しかし，この場合ここまでに用いた方法ではその積分による体積計算が難しい式になると思われる．

しかし，底面に平行な平面 $z=sh$ による断面が楕円

$$\frac{x^2}{((1-s)a+sr)^2}+\frac{y^2}{((1-s)b+sr)^2}=1$$

であるような設定にすれば，体積計算は容易で，その体積 V は

$$V=\frac{\pi h}{3}\left\{r^2+\frac{r}{2}(a+b)+ab\right\}$$

という単純できれいな式になる．

（2023 年 7 月 5 日）