円弧と直線を滑らかに接続する

斎　木　清　治

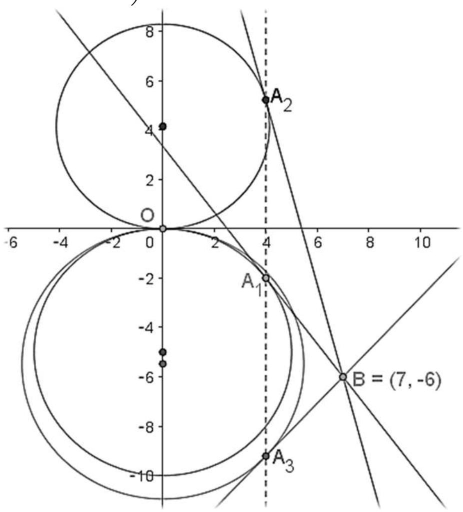
1　はじめに

次の問題を考えてみよう（ある質問箱の質問に関係させて作った問題であるので，少し不自然な文字設定になっている部分がある）．

> 座標平面上で，y軸上の点$(0,-r)$を中心とし原点 O を通る円を C とする（ただし，$|\,r\,|>4$である ）．
> C 上の点 $\mathrm{A}(4,\ b)$におけるこの円の接線が点 $\mathrm{B}(7,-6)$を通るとき，$b,\ r$の値を求めよ．

解き方はいろいろあるだろうが，次のように解いてみる．

C の方程式は$x^2+(y+r)^2=r^2$である．A がこの上にあるから，$4^2+(b+r)^2=r^2$ ……①
またこの円の A における接線は $4x+(b+r)(y+r)=c^2$で，この上に B があるから，
$28+(b+r)(-6+r)=r^2$ ……②
$b\neq 0$ であり，①より $r=-\dfrac{b^2+16}{2b}$ ……③
これを②へ代入して整とんすると $\dfrac{b^3+6b^2-40b-96}{2b}=0$ 　から $b^3+6b^2-40b-96=0$ ……④
因数定理により$(b+2)(b^2+4b-48)=0$ から $b=2,-2\pm 2\sqrt{13}$ ．
③より $(b,r)=(-2,5),\left(-2+2\sqrt{13},\dfrac{2-4\sqrt{13}}{3}\right),\left(-2-2\sqrt{13},\dfrac{2+4\sqrt{13}}{3}\right)$ となる．
これらは，$|\,r\,|>4$ を満たしている．
これを図示すると次のようになる．



このような問題で 3 次方程式を解くことになるとは，想定外のことである．とは言え，右のような図を描いてみれば，3 つのケースが存在することが諒解でき，3 次方程式も納得である．

2　一般化から

さて，この大元（おおもと）の質問では，A のx座標，および B の両座標は一般的な文字で，$\mathrm{A}(x_1,\ Y)$，　$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$と置かれており，求めたいのは図の接点が A1 のケースとなっていた．
その状態で，$Y,\ r$の値の$x_1,\ x_2,\ y_2$を用いた表示を知りたいと言うことなのであった．
その解決法は上に示した方法をトレースすればよいだけではあるのだが，④に相当する 3 次方程式
$Y^3-y_2Y+x_1(x_1-2x_2)Y+{x_1}^2y_2=0$　の解 Y が必要になる．
因数定理が使えないので，カルダノの公式などを用いざるを得ないのだが，　WolframAlpha による解の 1 つを表示すれば下のような複雑なものである(Y を y とした)．

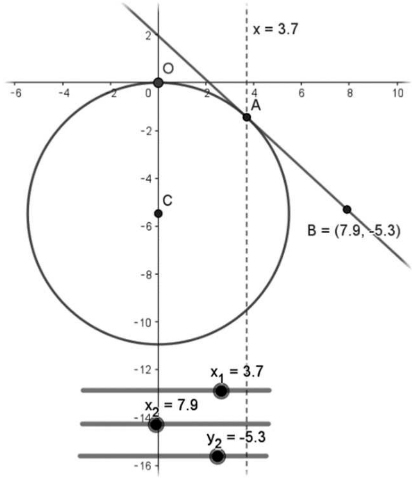
$$y=-\frac{1}{6\sqrt[3]{2}}(1+i\sqrt{3})\left(-36x_1^2y_2+18x_1x_2y_2+\sqrt{4(3x_1^2-6x_1x_2-y_2^2)^3+(-36x_1^2y_2+18x_1x_2y_2+2y_2^3)^2}+2y_2^3\right)\hat{}\,(1/3)$$
$$+\ ((1-i\sqrt{3})(3x_1^2-6x_1x_2-y_2^2))\Big/\left(3\times 2^{2/3}\left(-36x_1^2y_2+18x_1x_2y_2+\sqrt{4(3x_1^2-6x_1x_2-y_2^2)^3+(-36x_1^2y_2+18x_1x_2y_2+2y_2^3)^2}+2y_2^3\right)\hat{}\,(1/3)\right)+\frac{y_2}{3}$$

この解は虚数単位 i を含んでいるが，上の問題の条件 $x_1=4,\ x_2=7,\ \ y_2=-6$ を代入したとき，
$y=-2$となり，図の接点が A1 のケースの解になっている．このように虚数単位 i を含んではいるが実は実数である解は還元不能の解と呼ばれる．
このような式は，複素数計算が可能なソフトでもなければほぼ使い物にならない解である．

しかし，三角関数・逆三角関数を用いた 3 次方程式のビエトの解を用いると還元不能解の表示を回避できることがある．実際，その図の接点が A1 のケースについての y の値のビエトの解は次の式で表され，他の 2 つの解も i を含まない表示になる．

$$y=\frac{2\sqrt{-3{x_1}^2+6x_1x_2+{y_2}^2}\ \mathrm{sgn}(x_1)\sin(\arctan(\sqrt{3}y_2(18{x_1}^2-9x_1x_2-y_2^2))}{9x_1(-3{x_1}^2+6x_1x_2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x_1^4-6{x_1}^3x_2+{x_1}^2(12{x_2}^2+11y_2^2)-8x_1x_2({x_2}^2+y_2^2)}}$$

GeoGebra でx_1，x_2，y_2 (ただし，$0<x_1<x_2$，$y_2<0$)をスライダー設定し，上の解 (Yとする)に対して 2 点 A(x_1,Y)，B$(x_2,\ y_2)$を表示し，さらに，③から求めた r の式を用いて y 軸上の点を中心とし O を通る円を描けば，スライダー x_1，x_2，y_2を動かしても，常に条件を満たす円となることが確認できる．これが，質問者の真に求める回答だったのだろう．

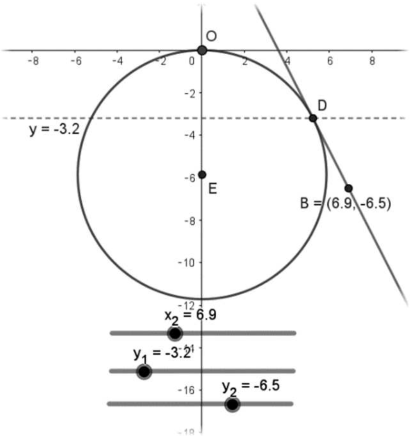


3　この式のニーズ

質問者によれば，CAD ではx_1，x_2，y_2 の値を入力すれば円弧 OA と接線 BA を描いてくれるというから，そのようなツールが組み込まれているのであろう．

考えてみれば，y 軸上に中心 C があり半径 OC の円弧と B を通る直線を，x 座標を指定した点 A で滑らかに（つまり接線として）接続したいという場面は設計上，作図上多くあるだろう．そのニーズへの問題解決である．

であれば， y 軸上に中心 E があり半径 OE の円弧と B を通る直線を，y 座標を指定した点 D で滑らかに接続する場合はどうなるのであろうか．



この場合も全く同様に方程式を設定して解けばよい．

D$(X,\ y_1)$ として同様にできる連立方程式

$X^2+(y_1+R)^2=R^2, Xx_2+(y_1+R)(y_2+R)=R^2$

を，$X>0$ という条件下で解く．

2 次方程式 $(y_1+y_2)X^2-2y_1x_2X+y_1^2(y_1-y_2)=0$

を解き，$X=\dfrac{y_1(x_2+\sqrt{x_2^2-y_1^2+y_2^2}\ )}{y_1+y_2}$ ……#

を接点 D のx座標とすればよい．

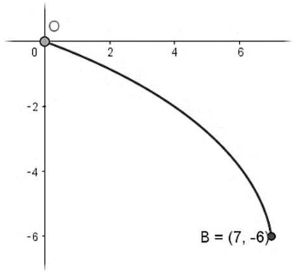
これも GeoGebra でその式で接点 D の座標設定をして描けば，スライダーを動かしても，常に条件を満たす円となることを確認できる．

4　接続点カーブ

この問題で，x_1，x_2，y_2 が既知であるときの条件を満たす y_1 を近似値で良いとして求めるなら，カルダノの公式などを用いなくても，Newton 法などで求めることが可能である．

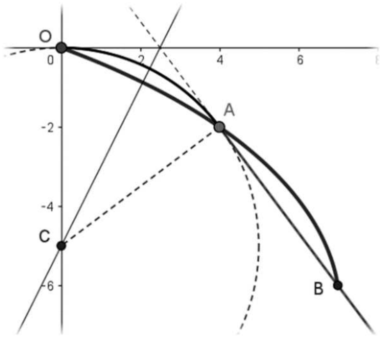
しかし，例えば点 B の座標 $(x_2,\ y_2)$ のみを既知として，この条件を満たす接続点 A を考え，その軌跡を考える場合はそうはいかない．

このとき，A の x 座標をパラメータ t とおいたとき，A の y 座標は 3 次方程式の t を含む解となるから，その解を同様にカルダノの公式で求めると，非還元な解になってしまう可能性があるが，上のようにビエトの解を用いればそこをクリアーできる．実際，B$(7,-6)$のとき，ビエトの解を用いて接続点の軌跡（接続点カーブと呼ぼう）を図示すれば右の通りである．



ビエトの解は偉い．

この場合は，A の y 座標をパラメータにおけば，2 次方程式の解#を用いて同じ軌跡を描くことが出来，その方が 3 次方程式でなく 2 次方程式を解けばよいので，解の式を求めるのが楽である．



この接続点カーブの両端 O，B を除くカーブ上の点 A に対して，線分 OA の垂直 2 等分線と y 軸との交点を C とすれば，C を中心とする弧 OA と線分 AB が点 A で滑らかに接続する．

したがって，A を決定する条件が，A の x 座標や y 座標が指定された場合以外にも，例えば

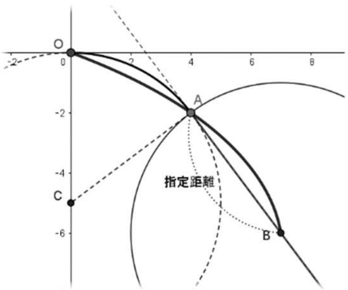
(i)　B からの距離が指定される

(ii)　円の半径が指定される

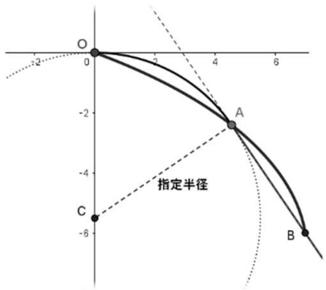
(iii)　直線 AB の傾きが指定される

などのような場合でも，この接続点カーブと条件を指定する円や直線との交点によって，点 A が確定していく（下図参照）．

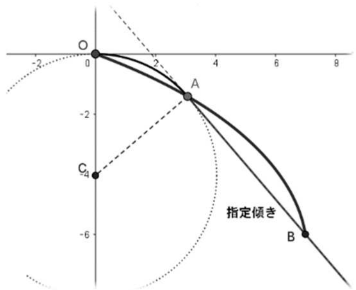
(i)



(ii)



(iii)



ただ，こういった条件を満たす A の座標を厳密に求めるには相応の計算が必要となる場合もある．

#を用い，A $\left(\dfrac{t\left(x_2+\sqrt{x_2^2-t^2+y_2^2}\right)}{t+y_2},\quad t\right)$ とパラメータ表示したとき，例えば

(i)の場合，方程式 $\left(\dfrac{t\left(x_2+\sqrt{x_2^2-t^2+y_2^2}\right)}{t+y_2}-x_2\right)^2+(t-y_2)^2=\left(\text{指定距離}\right)^2$ を

(ii)の場合，$R = -\dfrac{x_2^2 t+x_2\sqrt{t^2(x_2^2-t^2+y_2^2)}+t y_2(t+y_2)}{(t+y_2)^2}$ なので，方程式 $|R|=\left(\text{指定半径}\right)$ を解く必要がある．

GeoGebra では，この接続点カーブとある円弧との交点を「2 つのオブジェクトの交点」で表示してくれない（このカーブの式が複雑なため？）．

しかし，この接続点カーブとある直線の交点は「2 つのオブジェクトの交点」で表示してくれるので，(iii) の場合，B を通る指定傾きの直線を描き，交点を表示しその座標を表示させれば近似解が得られる（精度は，オプションの「丸め」で上げることが出来る）．

2024 年 4 月 29 日