「山型関数」についてのある考察

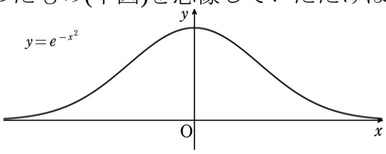
斎 木 清 治

1　はじめに

山型のグラフをもつ関数がある．

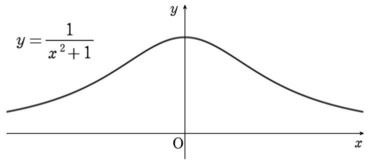
$y=\cos x$ $(-\pi/2<x<\pi/2)$ なども「山型」のグラフではあるが，ここでは，$x=0$ で極大となり，x 軸に漸近し，y 軸対称な曲線を想定したい．

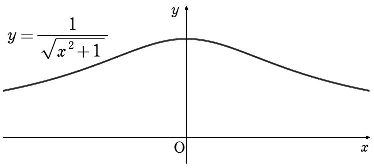
例えば，正規分布の関数に登場する $y=e^{-x^2}$ といったもの(下図)を想像していただけばよい．



全く数学的でない「定義」で申し訳ないが，こういったグラフをもつ関数を「山型関数」と呼んでみたい．

演習問題などによく登場する山型関数には，上の $y=e^{-x^2}$ 以外に，$y=\dfrac{1}{x^2+1}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ がある．



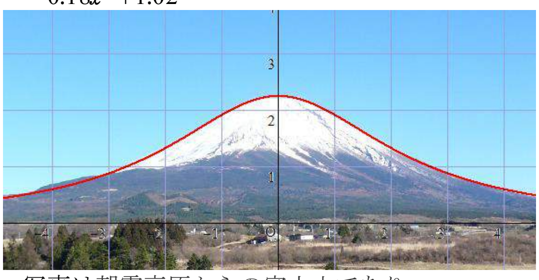


2　富士山はどの曲線に近い？

山と言えば富士山．そこで富士山の写真に，上の 3 つのタイプのグラフを重ねて，係数を調整してみると，一番ぴったりだったのは $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ のタイプであった．

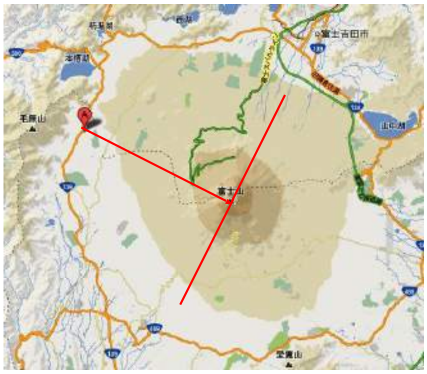
下の画像がそれで，曲線の方程式は

$y=\dfrac{2.34}{0.18x^2+1.02}$ である．



写真は朝霧高原からの富士山であり，http://blog.jutakukouei.co.jp/higolog/351 から寸借した．

無論，見る方向によって違うのは当然であるが，左右対称のきれいな曲線を描いている画像を探して使った．



様々なコニーデについて，その山型の方程式を定めてみるのも一興かも知れない．

ここまではお遊びのようなものである．

3　接線の x 軸切片関数 $p(x)$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ が x 軸と交わる点の x 座標 $p(x)$ は，$y=0$ として，$p(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ である．

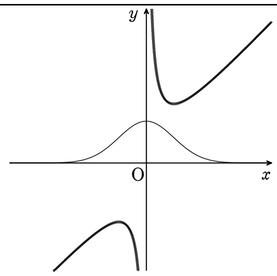
これを私は「接線の x 軸切片関数」と呼んでいる．

この関数の詳しい性質などは，拙著『問題作りの道具箱』を参照されたい．

さて，1 に挙げた 3 つの山型関数の x 軸切片関数は次の通りである．グラフは太線が $y=p(x)$，細線が $y=f(x)$ である．

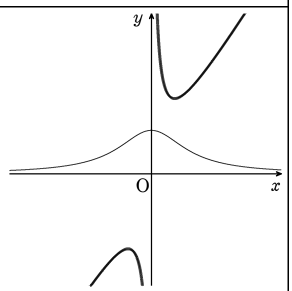
$f(x)=e^{-x^2}$

$p(x)=x+\dfrac{1}{2x}$



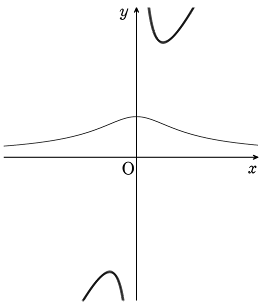
$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

$p(x)=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2x}$



$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$p(x)=2x+\dfrac{1}{x}$



なお，$p(x)$ の極値は $f(x)$ の変曲点の x 座標で与えられる．

山型関数 $f(x)$ の式がこんなにも異なるのに，x 軸切片関数 $p(x)$ の式がこれほどまでに酷似しているのは驚きである．有理関数と無理関数は指数表示をしたときの指数が有理数と無理数の違いに過ぎない代数関数であるが，e^{-x^2} は超越関数である．

4　$p(x)$ から山型関数 $f(x)$ を作る

この 3 つの山型関数の x 軸切片関数の式を一般化して，$p(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ $(a>0,\ b>0)$ とする．

x 軸切片関数がこのようになる $f(x)$ を求めてみよう．

$$x-\frac{f(x)}{f'(x)}=ax+\frac{b}{x}\quad \text{とすると}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{(1-a)x^2-b}\ \text{であるから,}$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{x}{(1-a)x^2-b}dx\quad \text{となる．}$$

(i)　$a\neq1$ のとき

$$\log|f(x)|=\frac{1}{2(1-a)}\int\frac{\left((1-a)x^2-b\right)'}{(1-a)x^2-b}dx$$

$$=\frac{1}{2(1-a)}\log|(1-a)x^2-b|+C_1\,.$$

よって，$f(x)=A_1\{(a-1)x^2+b\}^{\frac{1}{2(1-a)}}$ となるが，a の値にかかわらず点 (0, 1) を通ることにすると，

$$f(x)=\{(a-1)x^2+1\}^{\frac{1}{2(1-a)}}\quad\cdots\cdots\quad ①$$

である．

(ii)　$a=1$ のとき

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=-\int\frac{x}{b}dx\quad \text{から}$$

$$\log|f(x)|=-\frac{x^2}{2b}+C_2\,.$$

よって，$f(x)=A_2e^{-\frac{x^2}{2b}}$ となるが，点 (0, 1) を通ることにすれば，

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2b}}\quad\cdots\cdots\quad ②$$

である．

①で $a=2$ とすると $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ が

$a=\dfrac{3}{2}$ とすると $f(x)=\dfrac{2}{x^2+2}$ が

得られる．

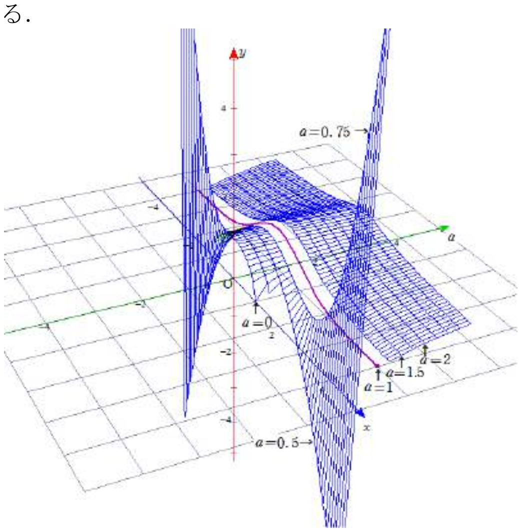
また，②で $b=1$ とすると $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ が得られる．

このようにしてみると，代数関数と超越関数が，$a\neq1$ か $a=1$ かというたったそれだけの違いで生まれてきている．

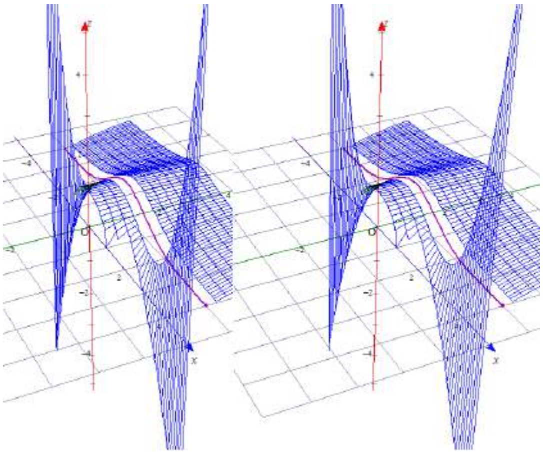
これはちょうど $\int x^p dx$ が，$p\neq-1$ なら代数関数 $\dfrac{1}{p+1}x^{p+1}+C$ であるが，$p=-1$ の場合に $\log|x|+C$ という超越関数になることと同じ事情であろう．

次に，$y=\{(a-1)x^2+1\}^{\frac{1}{2(1-a)}}$ と $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ の関係を 3D グラフにして表示してみた．

メッシュになっている曲面を a 軸に垂直な平面で切った切り口に，$a\neq1$ の場合のグラフが現れる．$a=1$ の場合の $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ は曲線で描いてある．



また，立体視ができる方のために，その画像も載せた．



このように見ると，①と②がそうは違わない関数であることがよく分かる．

実際，

$$\lim_{a\to 1}\{(a-1)x^2+1\}^{\frac{1}{2(1-a)}}=\lim_{h\to 0}(hx^2+1)^{-\frac{1}{2h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}(1+hx^2)^{\frac{1}{hx^2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)}=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

となって，そのつながりが分かる．

5　様々な山型関数

①で，係数 a の値を様々に変えると，それぞれに山型関数が現れることは，この 3D グラフからわかるが，最初に設定した「x 軸に漸近する」という条件を満たすものは，$a>1$ の場合である．

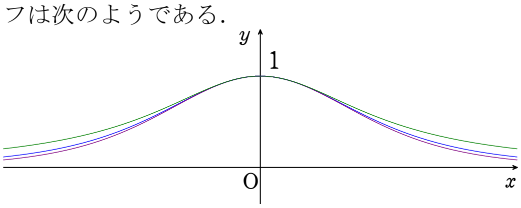
$a>1$ のとき

一般に，自然数 n に対して $a=\dfrac{2n+1}{2n}$ とすると

分数関数 $y=\left(\dfrac{2n}{x^2+2n}\right)^n$ が現れる．

具体的には，$a=\dfrac{5}{4}$ として $y=\dfrac{16}{(x^2+4)^2}$ が

$a=\dfrac{7}{6}$ として $y=\dfrac{216}{(x^2+6)^3}$ が現れ，それらのグラフは次のようである．



グラフは上から順に，$y=\dfrac{2}{x^2+2}$，$y=\dfrac{16}{(x^2+4)^2}$，$y=\dfrac{216}{(x^2+6)^3}$ である．

参考までに $0\leqq a<1$ の場合について触れる．

一般に，自然数 n に対して $a=\dfrac{2n-1}{2n}$ とすると

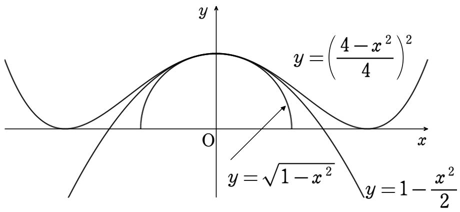
$2n$ 次関数 $y=\left(\dfrac{2n-x^2}{2n}\right)^n$ が現れる．

具体的には

$a=\dfrac{1}{2}$ とすると 2 次関数 $y=1-\dfrac{x^2}{2}$ が

$a=\dfrac{3}{4}$ とすると 4 次関数 $y=\left(\dfrac{4-x^2}{4}\right)^2$ が

現れてくる．



また，$a=0$ の場合，$b=1$ とすると，$y=\sqrt{1-x^2}$ という半円が現れる．

これらのグラフは上の通りである．

6　終わりに

『関数のカタログ』の原稿を整理しながら，山型のグラフをもつ関数の x 切片関数が酷似していることが，気になっていた．その関連をいつか解明したいと思っていたが，それを果たせたのではないかと思う．

このレポートの作成にあたって， Grapes3D が有用な 3D グラフを描いてくれ，視覚的に分かりやすくなった．感謝したい．

なお，拙著『問題作りの道具箱』は 2007 年刊，『関数のカタログ』は 2009 年刊，ともに発行所はプレアデス出版である．

（2012 年 12 月 25 日）

■雑誌『初等数学』第 71 号（2013 年 4 月号）に掲載．