# 立体「丸で四角で三角」について

斎　木　清　治

【抄録】　直交する 3 方向から見た図形が，それぞれ円，長方形，三角形という立体が存在する．積分で体積を求める問題として教科書に登場するこの立体は，形状を理解しづらい．そこで，その形状をコンピュータに描かせてみた．また，展開図をかいてこの立体模型を製作することが可能かどうかについても考察した．

【キーワード】　数学　積分　体積　立体　展開図　数式処理ソフト

## 1　はじめに

円の弦を底辺とし，高さが一定の 2 等辺三角形が，円の直径に沿って動いて出来る立体図形を考える．この立体は上から見れば丸，側面から見れば長方形，正面から見れば 2 等辺三角形であるので，「丸で四角で三角」と名づけることにしたい．

## 2　側面のパラメータ表示

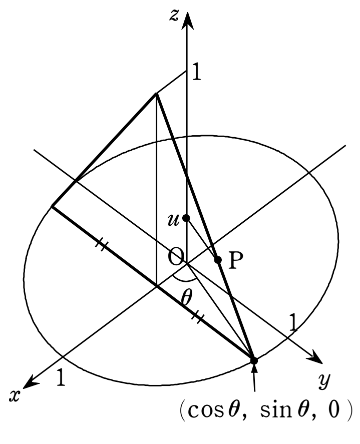
底面の円の半径，三角形の高さを 1 として，考えることにしよう．

図 1 のように値を決めると，

P $(\cos\theta,\ (1-u)\sin\theta,\ u)$ であることが容易に分かる．

なお，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$，$0 \leqq u \leqq 1$ である．

図 1：

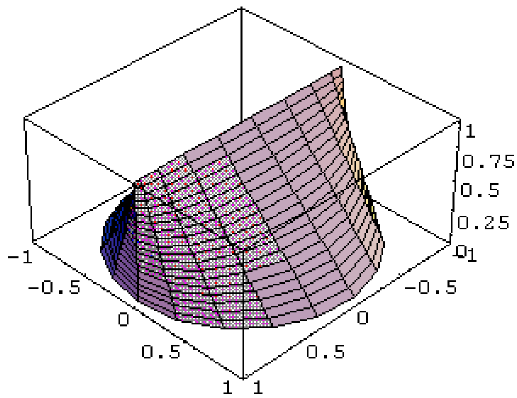



## 3　側面の図

数式処理ソフト Mathematica を用いて図をかくと，図 2 が得られた．

図は，透視図法によって遠くのものが小さくなるように描かれているために，このように斜め上から眺めた図では下の方がやや小さめに描かれている．その変形具合は，外側の枠の形から分かる．

図 2：　側面の図



## 4　3 方向から眺める

この立体を $x$, $y$, $z$ 軸方向から眺めた図が以下の図 3，4，5 の通りである．

図 3：　$x$ 軸方向

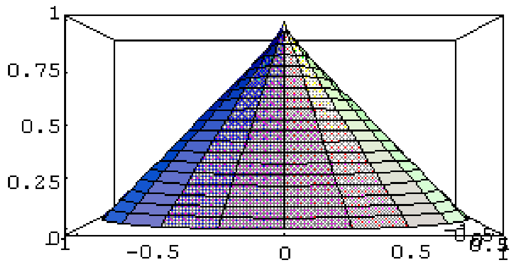


図 4：　$y$ 軸方向

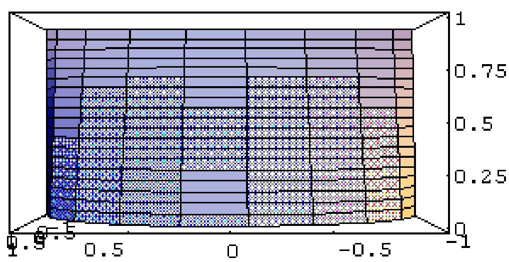
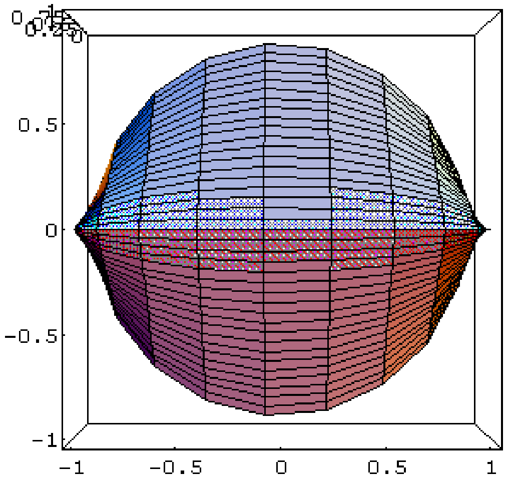


図 5： $z$ 軸方向




丸で四角で三角という状態がよく分かる．

$z$ 軸方向，すなわち真上から眺めた図が，円形に見えにくいが，これも透視図法を用いているためである．もう少し，遠い位置から眺めた図をかけば，円形に近づくはずである．

## 5 切断面図

この立体を $x$, $y$, $z$ 軸に垂直な平面で切った図が以下の図 6，7，8 の通りである（なお，底面は描かれていない）．

$x$ 軸，$z$ 軸に垂直な平面での切断面はそれぞれ 2 等辺三角形，楕円であることが，2 で示したパラメータ表示から分かる．

なお，$y$ 軸に垂直な平面での切断面の図形の名前は不明である．

図 6： $x$ 軸に垂直

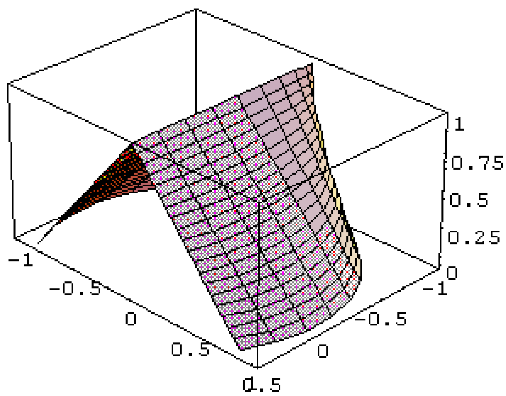



図 7： $y$ 軸に垂直

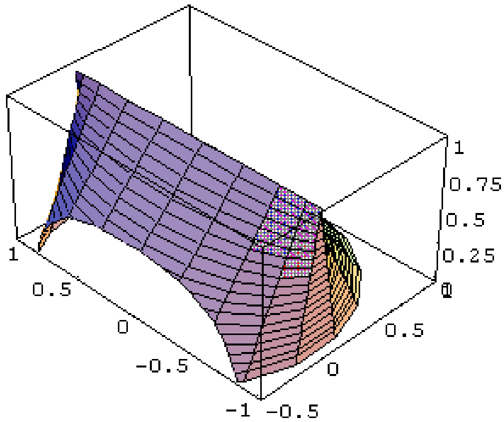
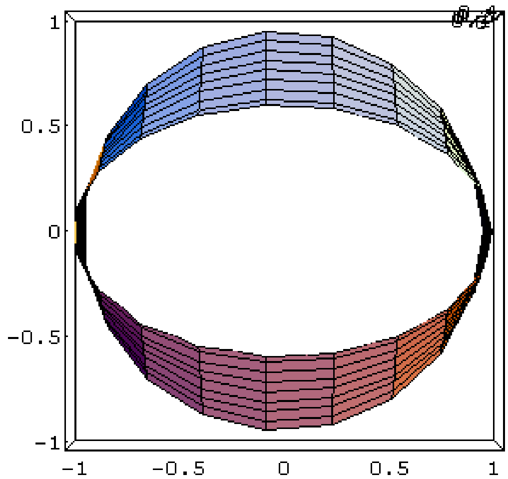



図 8： $z$ 軸に垂直




## 6 この立体の体積

そもそもこの立体は，体積を求める練習問題として登場することが多い．5 の切断面図を用いて，その体積 $V$ を求めよう．

$x$ 軸に垂直に切った断面図から

$V = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ である．

また，$z$ 軸に垂直に切った断面は，長軸の長さ 2，短軸のそれ $2(1-u)$ の楕円でその面積が $\pi(1-u)$ であることから

$V = \int_0^1 \pi(1-u)du = \frac{\pi}{2}$ としてもよい．

なお，

底面の半径 1，高さ 1 の円柱の体積 $V_1$，

底面の半径 1 の半球の体積 $V_2$，

底面の半径 1，高さ 1 の円錐の体積$V_3$，

この「丸で四角で三角」の体積$V$

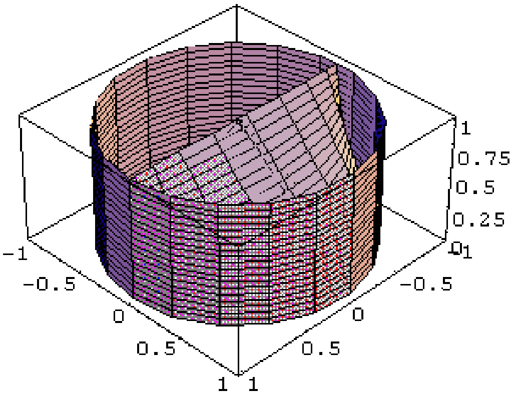
について

$$V_1 = \pi,\ V_2 = \frac{2}{3}\pi,\ V = \frac{1}{2}\pi,\ V_3 = \frac{1}{3}\pi$$

であるから，

$V_1 : V_2 : V : V_3$ =6：4：3：2 の関係があることを付記しておきたい（図 9）．

図 9：$V_1$ と $V$ の関係　$V_1 : V$ =2：1




## 7　展開図について

この立体の展開図をかくことができたら，容易にこの立体模型を作ることが出来る．

可能かどうかを調べるために，側面の全曲率を求める．

側面の点 P の位置ベクトル

$\vec{p} = (\cos\theta,\ (1-u)\sin\theta,\ u)$ に対して，

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} = (0,\ -\sin\theta,\ 1),\quad \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial u^2} = (0,\ 0,\ 0),$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} = (-\sin\theta,\ (1-u)\cos\theta,\ 0),$$

$$\frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial^2 \theta} = (-\cos\theta,\ (u-1)\sin\theta,\ 0),$$

$$\frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial u \partial \theta} = \frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial \theta \partial u}(0,\ -\cos\theta,\ 0)\quad \text{から}$$

$$E = \frac{\partial \vec{p}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} = \sin^2\theta + 1,$$

$$F = \frac{\partial \vec{p}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} = (u-1)\sin\theta\cos\theta,$$

$$G = \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} = 1 + u(u-2)\cos^2\theta$$

とおき，

$$D = \sqrt{EG - F^2}$$

$$= \sqrt{(u(u-2) - \sin^2\theta)\cos^2\theta + \sin^2\theta + 1}$$

とおくと

$$X = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -\sin\theta & 1 \\ (1-u)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}(u-1)\cos\theta,$$

$$Y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta \end{vmatrix} = -\frac{1}{D}\sin\theta,$$

$$Z = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & -\sin\theta \\ -\sin\theta & (1-u)\cos\theta \end{vmatrix} = -\frac{1}{D}\sin^2\theta$$

から作られるベクトル$(X,\ Y,\ Z)$との内積

$$L = (X,\ Y,\ Z)\cdot(0,\ 0,\ 0) = 0,$$

$$M = (X,\ Y,\ Z)\cdot(0,\ -\cos\theta,\ 0) = \frac{1}{D}\sin\theta\cos\theta,$$

$$N = (X,\ Y,\ Z)\cdot(-\cos\theta,\ (u-1)\sin\theta,\ 0) = \frac{1}{D}(1-u)$$

と $E,\ F,\ G$ を用いて，この側面の全曲率が

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{D^4}$$

であり，≡0 とはならないことから，展開図をかくことは，残念ながら不可能である．

なお，このことは広島女学院高等学校教諭の中原克芳氏に相談し，ご教示いただいたことを確認したものである．

## 8　参考文献


1　井川満ほか：高等学校　新編　数学Ⅲ（教科書），数研出版株式会社，1995

2　一松信：新数学事典，大阪教育図書，1979

3　清水克芳：広島私数研会誌　数学通信，広島県私立中・高等学校数学研究会，1997

4　小林昭七：曲線と曲面の微分幾何，裳華房，1977

5 白石修二：例題で学ぶ Mathematica〔グラフィックス編〕，森北出版株式会社，1996


＊補足

3DGrapes で作成した「立体視」用の画像を載せる．