交わらない２円の「交点」を通る直線について

斎 木 清 治

本誌第 76 号（2015 年 5 月 1 日刊）で，松田康雄先生が「直線の方程式」の中で，次のようなことを書いている．

２円 $x^2+y^2=3,\ (x-2)^2+(y-1)^2=2$ の交点を通る直線の方程式は，

$x^2+y^2-3-\{(x-2)^2+(y-1)^2-2\}=0$ より $y=-2x+3$ として求められる．

ところが，交わらない２円 $x^2+y^2=3,\ (x-4)^2+(y-1)^2=2$ に対して同様の計算を行うと

$x^2+y^2-3-\{(x-4)^2+(y-1)^2-2\}=0$ より $y=-4x+9$ と直線の方程式が出てくる．

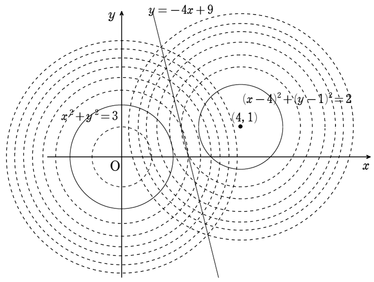
これはどう解釈したらよいか．

この内容は，多くの人が疑問に思うことであり，例えば，http://izumi-math.jp/F_Nakamura/suusemi/suusemi.PDF などの先行研究がある．

松田先生は，座標空間を考える次のような解釈を提起している．

「2 つの曲面 $z=x^2+y^2-3,\ z=(x-4)^2+(y-1)^2-2$ の共通部分を含む平面と xy 平面の交線と解釈したらいいのではないだろうか」として，右のような図が載っている．

点線の同心円は， $z=-2, 0, \cdots, 12$ に対応する円である（図は，私が描き直して載せたため，若干正確さを欠くかも知れない）．

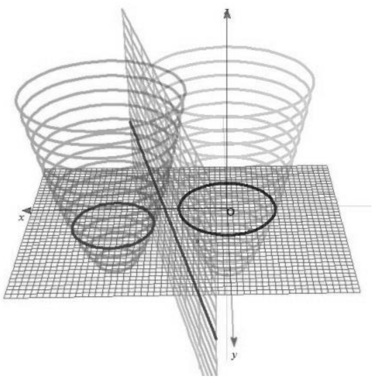


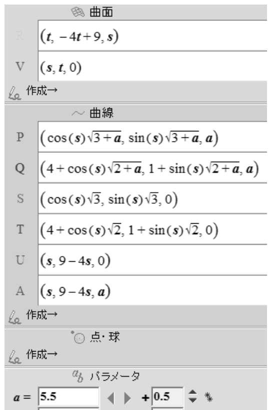
回転放物面が理解できれば，先に載せた先行研究よりも分かり易いかも知れない．とは言え，この図から「立体」をイメージするのは難しい．

3DGrapes で， 図を描いてみた．

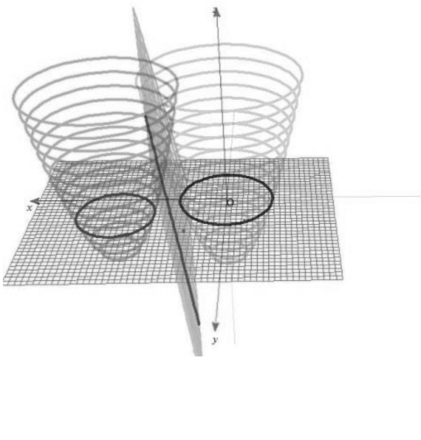
稚拙なファイルではあるが，データパネルも載せた．パラメータ a が上の z に対応し，a を動かすと，回転放物面と平面 $z=a$ との交線である 2 円が動き，2 円の交点を通る直線も動く．各曲面や曲線のパラメータ $s,\ t$ の範囲は工夫されたい．

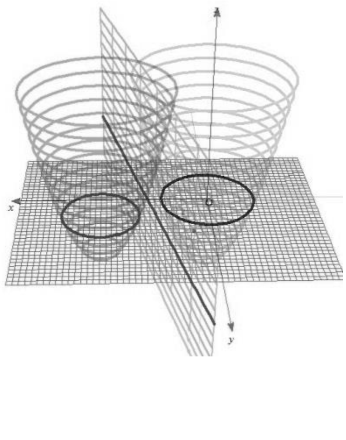
右のコップ状の図形が $z=x^2+y^2-3$ であり，左が $z=(x-4)^2+(y-1)^2-2$ である．





3DGrapes では，視点をいろいろ変更できるので，視点をずらしてみると分かり易い．立体視するともっと分かり易いので，それができる画像を下に載せた．





さて，高校生にとって回転放物面は未学習内容である．

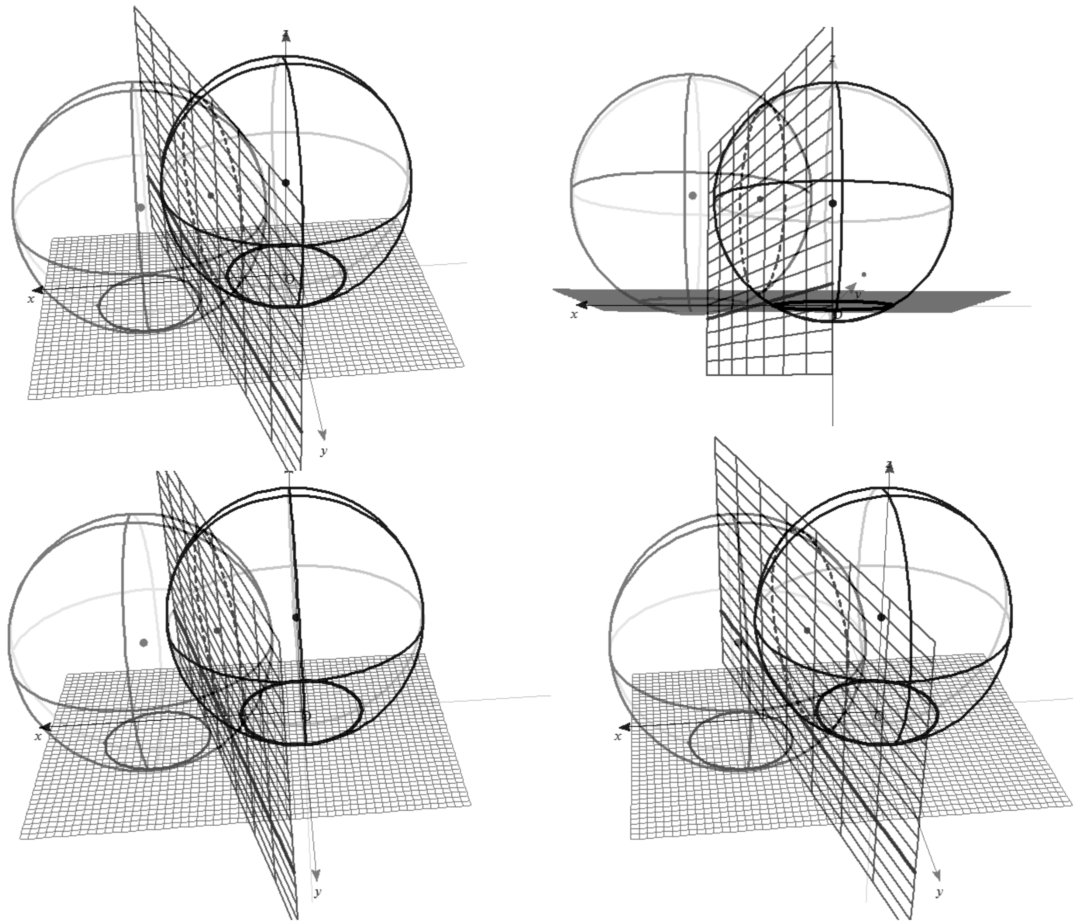
授業で扱う空間図形の方程式は，平面（それも座標平面に平行なもののみだが，一般の平面についても補足してあることが多い），球面，（パラメータ表示された）直線であり，曲面は球面に限られる．

そこで，この内容を「2 つの球面の共通部分を含む平面と xy 平面の交線として考える」方法を提案したい．

$x^2+y^2-3=2bz-z^2$，$(x-4)^2+(y-1)^2-2=2bz-z^2$ （右辺が同じであることに注意）とおくと，座標空間でこの 2 つの方程式は $x^2+y^2+(z-b)^2=b^2+3,\ (x-4)^2+(y-1)^2+(z-b)^2=b^2+2$ という 2 つの球面を表し，xy 平面（$z=0$）との交線は，2 円 $x^2+y^2=3,\ (x-4)^2+(y-1)^2=2$ である．

この 2 球面が交わるとき，（十分大きな値の b をとればこの 2 球面は交わるが，具体的には $\sqrt{b^2+3}+\sqrt{b^2+2}>\sqrt{17}$ を満たす $b>\sqrt{\dfrac{30}{17}}$ であればよい）その交線（交円・下図の破線）は 2 式を引いた $x^2+y^2-3-\{(x-4)^2+(y-1)^2-2\}=0$ より $y=-4x+9$ という<u>平面</u>上に存在する．この平面と xy 平面との交線が $y=-4x+9$ という<u>直線</u>になっている．

これも 3DGrapes を用いて図示すると次のようになる．下は立体視用の図である．



高校生の理解の範囲内になったとは言え，こういった図示なしには易しくないかも知れない．

愛知県立一宮高等学校勤務

＜On a line passing through the "intersection" of two circles that do not intersect＞　2015/05/30