初等関数表示不可能な不定積分に関する若干の考察

斎　木　清　治

1　はじめに

関数の微分は一般に容易だが，不定積分を求めるとなると難易度が上がり，場合によっては極めて技巧的な手法まで必要となる．手元の『岩波　数学公式 I』（微分積分・平面曲線）[1]は，付録を除く 289 頁中 221 頁を定積分を含む積分に充てており，関数のタイプ別に一般的な処理方法や具体的な公式が載っている．

しかも，よく知られているように，割と単純に見える関数でもその不定積分が，初等関数表示されないことがよくある．
初等関数の不定積分が初等関数表示できるかどうかについて，若干の考察を試みる．

2　初等関数

初等関数とは，「実数または複素数の 1 変数関数で，代数関数，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数および，それらの合成関数を作ることを有限回繰り返して得られる関数」のことである（Wikipedia）．

3　Liouville の定理

微分ガロア理論により，ある初等関数の不定積分が初等関数表示可能なかどうかを判定可能であるという．その条件を Liouville（1809－ 1882）が求めている．しかし，残念ながらそれを正確にここに記すことは，私の手に余る．関心のある方は[2]を参照されたい．その条件については[2]の Theorem 5.2 として，M. Rosenlicht による証明と共に記載がある．

その定理の系にあたる次の特殊化（[2]の Corollary 5.3）は，次の通りである．

$f(x)$, $g(x)$ を有理関数とする．このとき，

$f(x)e^{g(x)}$ の不定積分が初等関数表示できる

$\Longleftrightarrow$ 　$f(x)=h'(x)+h(x)g'(x)$ を満たす有理関数 $h(x)$ が存在する

この定理を[2]の Theorem 5.2 を経ずに証明する場合，$\Rightarrow$ は難しそうだが，$\Leftarrow$ ならば難しくはない．

実際，$f(x)=h'(x)+h(x)g'(x)$ を満たす有理関数 $h(x)$ が存在するとき

$$\int f(x)e^{g(x)}dx=\int \{h'(x)+h(x)g'(x)\}e^{g(x)}dx=\int h'(x)e^{g(x)}dx+\int h(x)g'(x)e^{g(x)}dx$$

$$=h(x)e^{g(x)}-\int h(x)e^{g(x)}g'(x)dx+\int h(x)g'(x)e^{g(x)}dx=h(x)e^{g(x)}+C$$

だからである．

4　判定例

$f(x)$, $g(x)$ を有理関数とし，関数 $f(x)e^{g(x)}$ の不定積分の具体例について，初等関数表示可能かどうかの判定を行ってみる．以下，$f(x)$, $g(x)$ を有理関数とする

(1) まず，初等関数表示できる関数からである．

(a) $y=x^3e^{x^2}$.

$f(x)=x^3,\ g(x)=x^2$ とするとき，$f(x)=h'(x)+h(x)g'(x)$ すなわち

$x^3=h'(x)+2xh(x)$ を満たす有理関数 $h(x)$ が存在するかどうかである．

$h(x)=\dfrac{x^2}{2}+Ax+B$　（$A,\ B$ は定数 ）とおくと，$h'(x)=x+A$ であり，

$h'(x)+2xh(x)=x^3+2Ax^2+(2B+1)x+A$ であるから，$A=0,\ B=-\dfrac{1}{2}$ とすれば

$h'(x)+2xh(x)=x^3$ となる．

したがって，$h(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}$ という有理関数が存在するので，初等関数表示可能である．

実際，$\int x^3e^{x^2}dx$ は，$x^2=u$ と置換し，部分積分を 1 回行えば $\int x^3e^{x^2}dx=\dfrac{x^2-1}{2}e^{x^2}+C$ となるが，今導いた $x^3=x+\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\right)(2x)=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\right)'+\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}\right)(x^2)'$ を用いれば，

$$\int x^3e^{x^2}dx=\int\left\{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)'e^{x^2}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)(x^2)'e^{x^2}\right\}dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)e^{x^2}-\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)(e^{x^2})'dx+\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)(x^2)'e^{x^2}dx=\frac{x^2-1}{2}e^{x^2}+C$$

である．

なお，$h'(x)+2xh(x)=x^3$ という微分方程式を解いてみるという手もありそうだが….

両辺に e^{x^2} を掛けて，$e^{x^2}h'(x)+e^{x^2}2xh(x)=e^{x^2}x^3$ で，左辺が $(e^{x^2}h(x))'$ となるから，

$e^{x^2}h(x)=\int x^3e^{x^2}dx$．右辺は，$x^2=u$ と置換すると $2xdx=du$ で，

$\int x^3e^{x^2}dx=\int\dfrac{u}{2}e^u du=\dfrac{1}{2}(ue^u-e^u)+C=\dfrac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+C$ となるから，

$h(x)=\dfrac{1}{2}(x^2-1)+Ce^{-x^2}$ である．

この C を 0 とした特殊解が，有理関数 $h(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$ として存在する．

とは言え，笑止千万のプロセスである．何しろ，微分方程式を解く段階で，$\int x^3e^{x^2}dx$ の不定積分を求めてしまった（！）のだから，何とも頓馬なことである．

(b) $y=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x$．

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$，$g(x)=x$ とするとき，$f(x)=h'(x)+h(x)g'(x)$ すなわち

$\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}=h'(x)+h(x)$ を満たす有理関数 $h(x)$ が存在するかどうかである．

試しに，$h(x)=\dfrac{x+A}{x+B}$　（$A,\ B$ は定数 ）とおくと，$h'(x)=\dfrac{B-A}{(x+B)^2}$ であり，

$h'(x)+h(x)=\dfrac{B-A}{(x+B)^2}+\dfrac{x+A}{x+B}=\dfrac{x^2+(A+B)x+(AB-A+B)}{(x+B)^2}$ であるから，

$A+B=0,\ AB-A+B=1$　より　$A=-1,\ B=1$ とすれば

$h'(x)+h(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$ となる．

したがって，$h(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ という有理関数が存在するので，初等関数表示可能である．

実際，$\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x dx$ は，$\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'+\dfrac{x-1}{x+1}$ を用いれば

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x dx=\int \left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'e^x+\frac{x-1}{x+1}e^x\right\}dx=\frac{x-1}{x+1}e^x-\int \frac{x-1}{x+1}(e^x)'dx+\int \frac{x-1}{x+1}e^x dx$$
$$=\frac{x-1}{x+1}e^x+C$$
である．

(2) 次に，初等関数表示できない典型的な関数を 2 つ取り上げる．

(c) $y=e^{-x^2}$.

正規分布の確率密度関数に登場する，重要で積分必要頻度の高い関数である．

$f(x)=1,\ g(x)=-x^2$ とするとき，$f(x)=h'(x)+h(x)g'(x)$ すなわち

$1=h'(x)-2xh(x)$ を満たす有理関数 $h(x)$ が存在するかどうかである．

有理関数 $h(x)$ が存在したとして，既約な有理式で $h(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ （$q(x)\neq 0$）と仮定する．

すると，$1=\dfrac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{\{q(x)\}^2}-2x\dfrac{p(x)}{q(x)}$ が成り立ち，これより

$\{q(x)\}^2=p'(x)q(x)-p(x)q'(x)-2xp(x)q(x)$ が成り立つ．

$q(x)\{q(x)-p'(x)+2xp'(x)\}=p(x)q'(x)$ から，$p(x)g'(x)$ は $q(x)$ で割り切れる．ここで，$p(x)$ と $q(x)$ が互いに素であるから，$q'(x)$ が $q(x)$ で割り切れる．$\deg q(x)>\deg q'(x)$ を考慮すれば，$q(x)=c$ (0 でない定数), $q'(x)=0$ の場合に限られる．

これを $q(x)\{q(x)-p'(x)+2xp'(x)\}=p(x)q'(x)$ へ代入して，$p'(x)=-\dfrac{c}{2x-1}$ を得るが，

これより $p(x)=-\displaystyle\int \frac{c}{2x-1}dx=-\frac{c}{2}\log|2x-1|+C$ で，これが整式になるのは $c=0$ の場合に限られ，$c\neq 0$ に矛盾する．

よって，$1=h'(x)-2xh(x)$ を満たす有理関数 $h(x)$ は存在しないから，$y=e^{-x^2}$ の不定積分は初等関数表示できない．

このため，正規分布表が必要になるわけである．

(d) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

$f(x)=\dfrac{1}{x},\ g(x)=x$ とするとき，$f(x)=h'(x)+h(x)g'(x)$ すなわち

$\dfrac{1}{x}=h'(x)+h(x)$ を満たす有理関数 $h(x)$ が存在するかどうかである．

有理関数 $h(x)$ が存在したとして，既約な有理式で $h(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ （$q(x)\neq 0$）と仮定する．

すると，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{\{q(x)\}^2}+\dfrac{p(x)}{q(x)}$ が成り立ち，これより

$q(x)\{q(x)-xp'(x)-xp(x)\}=-xp(x)q'(x)$ … ① が成り立つ．

①より $-xp(x)q'(x)$ は $q(x)$ で割り切れるが，$p(x)$ と $q(x)$ が互いに素であるから，$xq'(x)$ が $q(x)$ で割り切れる．$\deg(xq'(x)\}=\deg q(x)$ より，$xq'(x)=cq(x)$ （c は定数）とおける．

$\dfrac{q'(x)}{q(x)}=\dfrac{c}{x}$ より，$\displaystyle\int \frac{q'(x)}{q(x)}dx=\int \frac{c}{x}dx$ から，$q(x)=Ax^c$ （A は定数）である．

ここで，$q(x)\neq 0$ から，「$A\neq 0$」かつ「c は負でない整数」である．

$q(x)=Ax^c$，$q'(x)=Acx^{c-1}$ を①へ代入すると $Ax^c\{Ax^c-xp'(x)-xp(x)\}=-Acx^c p(x)$ より
$Ax^c-xp'(x)-xp(x)+cp(x)=0 \quad \cdots \quad$ ②.

$c\geqq 1$ のとき，②で $x=0$ とすると，$cp(0)=0$ であり $c\geqq 1$ より，$p(0)=0$ となる．よって，$p(x)$ は x を因数としてもつことになり，$p(x)$ と $q(x)$ が互いに素に反する．従って $c=0$ である．

$\deg p(x)=n$ $(\geqq 0)$ とすると，②において，Ax^c, $xp'(x)$, $xp(x)$, $cp(x)$ の次数がそれぞれ c, n, $n+1$, n であるから，$c=n+1$ である．$c=0$ より，$n=-1$ となり，$n\geqq 0$ に反する．

よって，$\dfrac{1}{x}=h'(x)+h(x)$ を満たす有理関数 $h(x)$ は存在しないから，$y=\dfrac{e^x}{x}$ の不定積分は初等関数表示できない．

なお，$\displaystyle\int \frac{e^x}{x}dx=\mathrm{Ei}(x)+C$ で，$\mathrm{Ei}(x)$ は指数積分という特殊関数である．

5　参考文献

[1] 森口繁一 他，岩波 数学公式 I 微分積分・平面曲線，岩波書店，1987.

[2] R.C. Churchill, Liouville's Theorem on Integration in Terms of Elementary Functions, 2006. (https://ksda.ccny.cuny.edu/PostedPapers/liouv06.pdf)

[3] 不定積分が初等関数で表せないものについて(Liouville の定理) , 2017. (http://tetobourbaki.hatenablog.com/entry/2017/01/08/182822)

2019 年 5 月 11 日