2 次曲線の標準化の便法

斎 木 清 治

1　はじめに

xy 平面上において，方程式

$F_1(x,\ y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ …①

が2次曲線である場合を考える．

このとき，

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2hfg - af^2 - bg^2 - ch^2,$$

$$D = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2$$

に対して，

(i)　①が楕円　$\Leftrightarrow$　$D > 0$ かつ $a\Delta < 0$

(ii)　①が双曲線　$\Leftrightarrow$　$D < 0$

(iii)　①が放物線　$\Leftrightarrow$　$D = 0$ かつ $\Delta \neq 0$

はよく知られた分類である．

しかし，①が具体的にどのような 2 次曲線であるかを調べるために，回転や平行移動によって標準形に直すとき，平行移動分と回転すべき角を求める計算は割と面倒である．

偏微分を利用した次のような便法を考えたが，いかがであろうか．

2　有心 2 次曲線の場合

対称の中心がある 2 次曲線は有心 2 次曲線と呼ばれる．楕円，双曲線のことである．

(1)　中心に関して

$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0$　が有心 2 次曲線であるとすると，その中心は O である．これを x 軸方向へ p，y 軸方向へ q だけ平行移動すると

$a(x-p)^2 + 2h(x-p)(y-q) + b(y-q)^2 + c = 0$ …②

である．②の左辺を $F_2(x, y)$ とおく．

このとき，

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2a(x-p) + 2h(y-q),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 2h(x-p) + 2b(y-q)$$

であるから，連立方程式 $\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 0} \\ \boldsymbol{\dfrac{\partial F_2}{\partial y} = 0} \end{cases}$ の解が

$(x,\ y) = (p,\ q)$ になる．

このようにして，**中心**が求められる．

(2)　軸に関して

一般に 2 変数関数 $F_0(x,\ y)$ に対して，ベクトル $\left(\dfrac{\partial F_0}{\partial x},\ \dfrac{\partial F_0}{\partial y}\right)$ が，曲線 $F_0(x,\ y) = 0$ の上の点 (x, y)における法線ベクトルの 1 つであることは，$\dfrac{\partial F_0}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F_0}{\partial y}$ がそれぞれ x 軸方向，y 軸方向の変化率であることから，諒解できるだろう．

これを用いると，①の有心 2 次曲線の中心が点 $(p,\ q)$ であるとき，①の軸上の点 $(x,\ y)$ に対して　$(x-p,\ y-q)\ /\!/\ \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x},\ \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\right)$ の関係があることから，$\boldsymbol{(x-p)\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = (y-q)\dfrac{\partial F_1}{\partial x}}$ を満たす．

これによって，①の**軸**（頂点を通る直線）の方程式を求めることが可能である．

(3)　具体例

【例 1】次は 1 の分類により楕円である．

$10x^2 - 4xy + 7y^2 - 36x - 6y + 28 = 0$　…　③

③の左辺を $F_3(x,\ y)$ とおけば，連立方程式

$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial y} = 0 \end{cases}$　すなわち $\begin{cases} 20x - 4y - 36 = 0 & \cdots④ \\ -4x + 14y - 6 = 0 & \cdots⑤ \end{cases}$

の解 $(x,\ y) = (2,\ 1)$ に対して，③は

$10(x-2)^2 - 4(x-2)(y-1) + 7(y-1)^2 - 11 = 0$

と変形できて，③が楕円

$10x^2 - 4xy + 7y^2 - 11 = 0$　…　⑥

を中心が点 (2, 1) となるように平行移動したものだと分かる．

なお，④は③の楕円の極大点と極小点を結ぶ直線であり，⑤は左右方向の極大点と極小点（という表現でよいのだろうか）を結ぶ直線であり，それらの交点が中心である．

さらに，$(x-2)\dfrac{\partial F_3}{\partial y} = (y-1)\dfrac{\partial F_3}{\partial x}$ とすれば

$(x-2)(-4x+14x-6) = (y-1)(20x-4y-36)$

となり，これより $2(x+2y-4)(2x-y-3) = 0$

となって，$x + 2y - 4 = 0,\ 2x - y - 3 = 0$ が軸である．したがって，⑥の軸は $x + 2y = 0,\ 2x - y = 0$ と分かる（⑥の偏微分を用いても良い (*2)）．

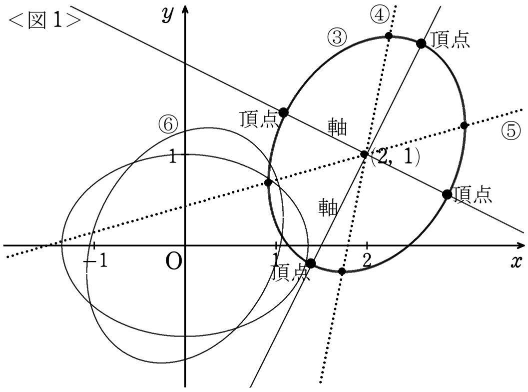
⑥を回転によって標準化するためには，軸の傾きから⑥を O 周りに角 $-\arctan 2$ だけ回転すればよいことも分かる．

回転変換の公式を用いない場合 [(*1)] について，触れる．

⑥の軸と⑥との交点は頂点で，その座標が $\pm\left(\sqrt{\frac{11}{30}},\ 2\sqrt{\frac{11}{30}}\right),\ \pm\left(2\sqrt{\frac{11}{55}},\ -\sqrt{\frac{11}{55}}\right)$ と容易に求まるから，長軸半径が $\sqrt{1+2^2}\sqrt{\frac{11}{30}}=\sqrt{\frac{11}{6}}$，短軸半径が $\sqrt{2^2+1}\cdot\sqrt{\frac{11}{55}}=1$ と分かり，回転によって標準化した式は $\frac{6x^2}{11}+y^2=1$ である．

③は図1の太線の楕円である．

＜図1＞



説明を加えながら求めたので，やや手間がかかるように見えるかも知れないが，手順を踏んだ計算だけなら分量もそう多くない，平易な計算過程であろう．整理すれば次の通りである．

StepI：

$F_3(x, y)=10x^2-4xy+7y^2-36x-6y+28=0$ から $\frac{\partial F_3}{\partial x}=0,\ \frac{\partial F_3}{\partial y}=0$ という連立方程式を解き，解 $(x, y)=(2, 1)$ から中心を求める．

$F_3(x+2, y+1)$ を計算し，1次の項のない $10x^2-4xy+7y^2-11=0$ を求める．

StepII：

$(x-2)\frac{\partial F_3}{\partial y}=(y-1)\frac{\partial F_3}{\partial x}$ から，軸 $x+2y=0,$ $2x-y=0$ を求める．

$10x^2-4xy+7y^2-11=0$ の偏微分利用も OK.

StepIII：（O 周りに $-\arctan 2$ の回転でもよいが）

$10x^2-4xy+7y^2-11=0$ と軸 $x+2y=0,$ $2x-y=0$ の共有点（頂点）を求め，軸の長さを計算し，標準形 $\frac{6x^2}{11}+y^2=1$ を求める．

【例2】次は1の分類により双曲線である．

$F_4(x, y)=x^2+6xy-7y^2+2x-26y-17=0$ …⑦

連立方程式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_4}{\partial x}=2x+6y+2=0 & \cdots⑧\\[2mm] \dfrac{\partial F_4}{\partial y}=6x-14y-26=0 & \cdots⑨\end{cases}$$

の解は $(x, y)=(2, -1)$ であるから，⑦の中心は点 $(2, -1)$ である．

$F_4(x+2, y-1)=x^2+6xy-7y^2-2$ より，⑦は

$(x-2)^2+6(x-2)(y+1)-7(y+1)^2-2=0$

となり，これは双曲線

$x^2+6xy-7y^2-2=0$ … ⑩

を中心が点 $(2, -1)$ となるように平行移動したものである．

さらに，$(x-2)\frac{\partial F_4}{\partial y}=(y+1)\frac{\partial F_4}{\partial x}$ とすれば

$(x-2)(6x-14y-26)=(y+1)(2x+6y+2)$

すなわち

$-2(x-3y-5)(3x+y-5)=0$

となって，$x-3y-5=0,\ 3x+y-5=0$ が⑦の軸である．よって，⑩の軸は $x-3y=0,\ 3x+y=0$ となる（⑩の偏微分を用いても良い）．

⑩を回転によって標準化するためには，軸の傾きから⑩を O 周りに角 $-\arctan\frac{1}{3}$ だけ回転すればよいことが分かる．

回転変換の式を使わないならば，⑩と軸 $x-3y=0$ との交点の座標が $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ であるから，これらが頂点であり，$x-3y=0$ が主軸である．頂点と中心 O との距離は，$\sqrt{3^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=1$ である．⑩と副軸 $3x+y=0$ は交点を持たないが，連立して計算すると $\pm\frac{1}{20}(\sqrt{10}\,i,\ -3\sqrt{10}\,i)$ が求まる．この値において i を「無視」して，主軸の場合と同様に「距離」$\frac{1}{20}\sqrt{10+3^2\cdot 10}=\frac{1}{2}$ が求まる [(*3)] から，標準形は $x^2-\frac{y^2}{(1/2)^2}=1$ すなわち $x^2-4y^2=1$ になる．

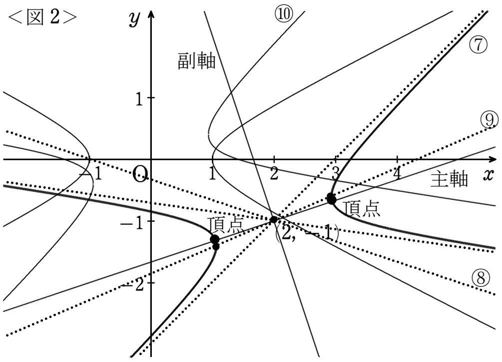
また，⑦の漸近線は

$(x-2)^2+6(x-2)(y+1)-7(y+1)^2=0$

すなわち $(x-y-3)(x+7y+5)=0$ から，$x-y-3=0,\ x+7y+5=0$ である．

⑦は図2の太線の双曲線である．

＜図 2＞



3　放物線の場合

(1)　軸と頂点に関して

一般の放物線は $D=0$ から,

$$F_5(x,\ y)=(\alpha x-\beta y)^2-\gamma x-\delta y-\varepsilon=0 \quad \cdots ⑪$$

とおける.

⑪の軸と放物線⑪の共有点は 1 個であるから, その方程式は $\alpha x-\beta y+k=0$ の形をしている.

従って, 放物線 $F(x,\ y)=0$ の軸の方向ベクトルは, $(\beta,\ \alpha)$ である.

一方, 曲線 $F_5(x,\ y)=0$ に対して, この曲線の法線ベクトルの 1 つは $\left(\dfrac{\partial F_5}{\partial x},\ \dfrac{\partial F_5}{\partial y}\right)$ であるから,

$(\beta,\ \alpha) \mathbin{//} \left(\dfrac{\partial F_5}{\partial x},\ \dfrac{\partial F_5}{\partial y}\right)$ より $\boldsymbol{\alpha\dfrac{\partial F_5}{\partial x}=\beta\dfrac{\partial F_5}{\partial y}}$ である.

これより, **軸**の方程式が求まる.

⑪と軸の交点が頂点である.

頂点を O へ移す平行移動の後, O 中心に角 $-\arctan\dfrac{\alpha}{\beta}$ の回転をすれば標準形になる.

(2)　具体例

【例 3】次は 1 の判定により放物線を表す.

$$F_6(x,y)=9x^2-12xy+4y^2-58x+4y+17=0 \cdots ⑫$$

$$\frac{\partial F_6}{\partial x}=18x-12y-58,\ \frac{\partial F_6}{\partial y}=-12x+8y+4$$

で, $F_6(x,\ y)=(3x-2y)^2-58x+4y+17$ であるから, 軸は, $3\dfrac{\partial F_6}{\partial x}=2\dfrac{\partial F_6}{\partial y}$ より

$3(18x-12y-58)=2(-12x+8y+4)$ すなわち

$3x-2y-7=0$ である.

頂点は⑫と軸 : $3x-2y-7=0$ を連立して, $(x,\ y)=(1,\ -2)$ より, 点 $(1,\ -2)$ である.

頂点が O に行くような平行移動を行うと,

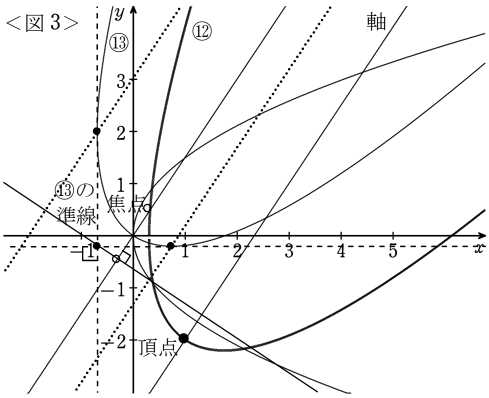
$$F_7(x,\ y)=(3x-2y)^2-8(2x+3y)=0 \quad \cdots ⑬$$

が得られる. これに対して, O 中心に角 $-\arctan\dfrac{3}{2}$ の回転を行えば, 標準形 $y^2=\dfrac{8}{\sqrt{13}}x$ を得る.

なお, ⑬の軸は $3x-2y=0$ である.

⑫は図 3 の太線の放物線である.

＜図 3＞



回転変換の公式を用いずに標準形を計算するためには, 標準形 $y^2=4px$ の p の値を求めなければならないが, この求値は余り容易でないように思われる.

試みに, ⑬から求めてみる.

$$\frac{\partial F_7}{\partial x}=18x-12y-16=0,\ \frac{\partial F_7}{\partial y}=-12x+8y-24=0$$

は⑬の「極点」を通り軸に平行な直線である.「極点」の座標はこれらの直線と⑬を連立して $\left(\dfrac{88}{117},\ -\dfrac{8}{39}\right)$, $\left(-\dfrac{9}{13},\ \dfrac{51}{26}\right)$ である. したがって, 2 直線 $y=-\dfrac{8}{39}$, $x=-\dfrac{9}{13}$ は直交する⑬の接線であるから, 点 $\left(-\dfrac{9}{13},\ -\dfrac{8}{39}\right)$ は⑬の準線上にある. 準線が軸に垂直であることから準線の方程式を求めると, $2x+3y+2=0$ となる. $|p|$ は準線と頂点の距離に等しく, $|p|=\dfrac{|0+0+2|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ となる.

放物線の存在範囲を考慮して $p>0$ から, 標準形は $y^2=\dfrac{8}{\sqrt{13}}x$ となる.

4　註　記

(*1)　O 周りの回転に関しては,『初等数学』第 84 号に「有心 2 次曲線を標準形に変形する幾つかの方法」として述べた.

(*2)　⑥の軸は⑥の偏微分から求めるのが平易だが, ③の軸を単純計算で求めることができるため, あえてこのようにした. ⑩と⑦も同様である.

(*3)　無理な計算に見えるが, 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において, $x=0$（副軸）としたとき, $y=\pm bi$ になることと符牒があう.

2018 年 12 月 6 日