割線の切片と加法定理

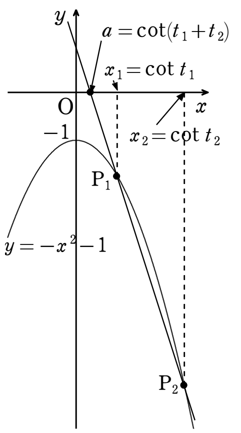
斎　木　清　治

1　はじめに

2017 年九州大学・理学部後期の入試問題に次がある．関心の対象外である(4)を省いた．

> 放物線 $C: y=-x^2-1$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P_1}\ (x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P_2}\ (x_2,\ y_2)$ に対して，$\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{P_2}$ を通る直線と x 軸の交点の座標を $(a,\ 0)$ とする．ただし，x_1+x_2 は 0 でないとする．また，$0<t<\pi$ を満たす t に対して，$f(t)=\dfrac{\cos t}{\sin t}$ とするとき，次の問いに答えよ．
>
> (1)　a を $x_1,\ x_2$ を用いて表せ．　　(2)　$(f(t),\ f'(t))$ は C 上の点であることを示せ．
>
> (3)　$0<t_1<\dfrac{\pi}{2},\ 0<t_2<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす異なる t_1 と t_2 に対して，C 上の 2 点 $\mathrm{P_1}\ (f(t_1),\ f'(t_1))$，$\mathrm{P_2}\ (f(t_2),\ f'(t_2))$ で定まる a は $f(t_1+t_2)$ に等しいことを示せ．

(1)は計算するだけである．割線 $\mathrm{P_1P_2}$ の方程式が $y+x_1{}^2+1=-(x_1+x_2)(x-x_1)$ であるから，$a=\dfrac{x_1x_2-1}{x_1+x_2}$ となる．$f(t)=\cot t$ で，$f'(t)=-\dfrac{1}{\sin^2 t}=-(1+\cot^2 t)$ であるから $1+\{f(t)\}^2=-f'(t)$ となり，(2)が従う．(3)が興味深く，関数 $f(t)$ の加法定理に関連している．



2　cot の加法定理との関連

馴染みは薄いが，cot の加法定理は次の通りである（証明は容易）．

$$\cot(A\pm B)=\frac{\cot A\cot B\mp 1}{\cot A\pm\cot B}.$$

これで(3)も難なく解ける．$f(t_1)=x_1,\ f(t_2)=x_2$ とおけば，(1)により

$$a=\frac{x_1x_2-1}{x_1+x_2}=\frac{f(t_1)f(t_2)-1}{f(t_1)+f(t_2)}=\frac{\cot t_1\cot t_2-1}{\cot t_1+\cot t_2}$$ であり，

加法定理によりこれが $\cot(t_1+t_2)=f(t_1+t_2)$ に等しい．

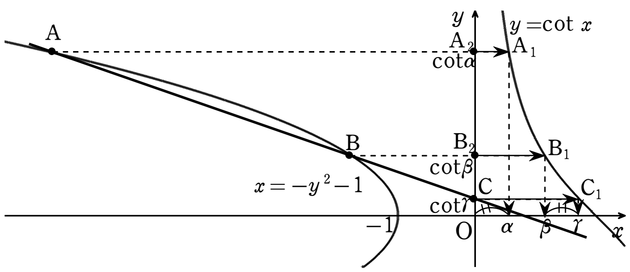
この関係を図示すれば右の通りである．

とは言え，この図からこの関係の正しさが了解できるわけではない．

これを「なるほど」と思える図に改造してみよう．

$x,\ y$ を入れ替え，文字を大幅に変更するが，この関係の仕組みを図示すると右のようになる．

$\mathrm{A}\ (-a^2-1,\ a)$，$\mathrm{B}\ (-b^2-1,\ b)$ に対して，割線 AB の y 切片 $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{ab-1}{a+b}\right)$ である．



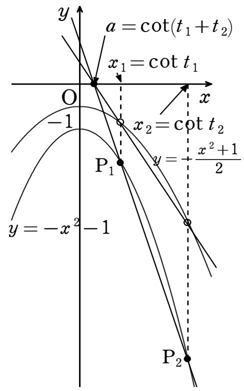
さらに，$a=\cot\alpha,\ b=\cot\beta$（ここでは，便宜的に $a>0,\ b>0$ として，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする）とおくと，$\dfrac{ab-1}{a+b}=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}=\cot(\alpha+\beta)$ であるから，上の図において $\alpha+\beta=\gamma$ の関係がある．

実際に線分 $\mathrm{A_1A_2}$，$\mathrm{B_1B_2}$，$\mathrm{CC_1}$ の長さを測って，$\mathrm{A_1A_2}+\mathrm{B_1B_2}=\mathrm{CC_1}$ となっていることが確認できる．

割線の x 切片がこの形になる 2 次関数を求めてみると $y=p(x^2+1)$（$p\neq 0$）に限られ，その切片の形になる加法定理の形が cot の加法定理であることを結びつけた，興味深い問題である．

なお，次頁の図からも良く分かることだが，p の値が 0 でさえなければ値（正負を問わない）にかかわらず常にこのような関係が成り立っている．p の値の変更は y 軸方向の拡大・縮小に対応するだけだからである．

この入試問題で $p=-1$ と設定してあるのは，(2)との繋がりのためである．



3　加法定理を表示する曲線を導く

この問題で関数 $\cot t$ の加法定理を表示する曲線として，唐突に登場した C: $y=-x^2-1$ は，どのようにして作られたのであろうか．

以降，関数 $f(t)$ の加法定理を表示する曲線 C の方程式を $y=g(x)$ とする．

一般に，曲線 C: $y=g(x)$ 上の異なる 2 点 $(x_1,\ g(x_1))$, $(x_2,\ g(x_2))$ を通る割線の x 切片は $x_1-\dfrac{(x_1-x_2)g(x_1)}{g(x_1)-g(x_2)}$ となる．

$\cot t$ の加法定理を表示する関数 $g(x)$ では，$\cot t$ の加法定理からこの値が $\dfrac{x_1x_2-1}{x_1+x_2}$ に等しいという条件を満たす必要があった．

したがって，$x_1-\dfrac{(x_1-x_2)g(x_1)}{g(x_1)-g(x_2)}=\dfrac{x_1x_2-1}{x_1+x_2}$ $(x_1\neq x_2)$ …… ① という関数方程式（というほどのものでもないが）を解けば，$f(t)=\cot t$ に対する $g(x)$ が定まることになる．

関数方程式では，特殊な値を代入してみるというのがアプローチの 1 つである．

そこで，①で $x_1=0,\ x_2=x$ としてみると，$\dfrac{xg(0)}{g(0)-g(x)}=-\dfrac{1}{x}$ より，$g(x)=g(0)(x^2+1)$ となり，$g(0)=c$ とおくと，$g(x)=c(x^2+1)$ となって求まった．

しかし，ここで終わりとしてはならない．これはあくまで必要条件でしかないので，この $g(x)=c(x^2+1)$ が①を満たすこと（十分性）を確認しなければならない．

計算は容易で，①の左辺 $=x_1-\dfrac{(x_1-x_2)c(x_1{}^2+1)}{c(x_1{}^2+1)-c(x_2{}^2+1)}=x_1-\dfrac{x_1{}^2+1}{x_1+x_2}=$ ①の右辺 である．

x_1 または x_2 に他の値を代入しても同様で，例えば①で $x_1=2,\ x_2=x$ として $g(x)$ を求めると（途中の計算は省くが）$g(x)=\dfrac{g(2)}{5}(x^2+1)$ となり，同じ形になることを付言しておく．

4　他の関数についても曲線を作る

同じ方法で $\tan t$ の加法定理 $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ を表示する関数を作ってみよう．

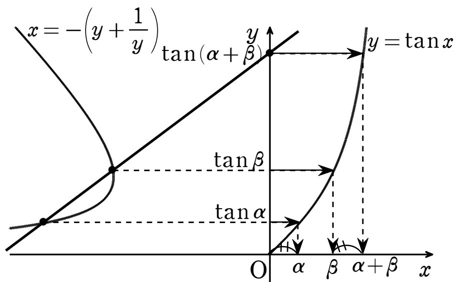
$f(t)=\tan t$ の加法定理を表示する関数 $g(x)$ の割線の x 切片が $\dfrac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}$ であるから，満たすべき関数方程式は $x_1-\dfrac{(x_1-x_2)g(x_1)}{g(x_1)-g(x_2)}=\dfrac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}$ $(x_1\neq x_2)$ …… ②　である．

②において $x_1=0,\ x_2=x$ とすると $\dfrac{xg(0)}{g(0)-g(x)}=x$ で，ここからは $g(x)=0$ が得られるが，用をなさない．

そこで，改めて $x_1=1,\ x_2=x$ とすると，$g(1)=c$ として $1-\dfrac{c(1-x)}{c-g(x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$ より，$g(x)=\dfrac{1}{2}c\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ となる．

これも②を満たすことが容易に確認できる．

$f(t)=\tan t$ について，$\cot t$ の加法定理と同様なグラフを描けば，右のようになる（$c=-2$ とした）．



なお，②において $x_1=0,\ x_2=x$ として得られた $g(x)=0$ は，$g(x)=\dfrac{1}{2}c\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ において $c=0$ としたものに相当する．

5　別の方法で曲線を作る

$g(x)$ の微分可能性を仮定すれば，ここから微分方程式を作ることができる．

まず，$f(t)=\cot t$ についてである．$x_2 \to x_1$ とした極限をとって $\displaystyle\lim_{x_2\to x_1}\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=g'(x_1)$ に注意し，$x_1=x$ とすれば，①の関数方程式から $x-\dfrac{g(x)}{g'(x)}=\dfrac{x^2-1}{2x}$ という微分方程式が導かれる．

これは，別の見方をすれば $x_2 \to x_1$ としたとき割線は $x=x_1$ における接線に移るから，$x-\dfrac{g(x)}{g'(x)}$ は $g(x)$ の x 軸切片関数（と私が勝手に呼んでいる：『問題作りの道具箱』（拙著）p.184 参照）に他ならない．

また，右辺の $\dfrac{x^2-1}{2x}$ は $x=\cot t$ としたときの 2 倍角 $\cot 2t=\dfrac{\cot^2 t-1}{2\cot t}$ の式に等しい．

この微分方程式は $\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x}{x^2+1}$ の変形から $\displaystyle\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx$ より

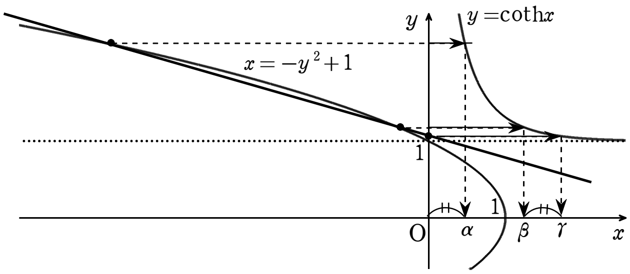
$\log|g(x)|=\log(x^2+1)+c'$ となり，$g(x)=c(x^2+1)$ が導かれる．

次に，$f(t)=\tan t$ についても同様に求めてみる．加法定理を表示する関数 $g(x)$ の割線の x 切片が $\dfrac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}$ であるから，$x-\dfrac{g(x)}{g'(x)}=\dfrac{2x}{1-x^2}$ という微分方程式ができる．ここから $\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}$ となり，右辺は $\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x}$ と変形でき，両辺を積分して，$\log|g(x)|=\log(x^2+1)-\log|x|+c'$．よって，$x>0$ としておけば，$g(x)=\dfrac{c(x^2+1)}{x}=c\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ となる．

双曲線関数は一般の三角関数に類似した性質を持っている．

双曲線余接関数 $\coth x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ においては加法定理 $\coth(A+B)=\dfrac{\coth A\coth B+1}{\coth A+\coth B}$ が成り立つ．

ここから $x-\dfrac{g(x)}{g'(x)}=\dfrac{x^2+1}{2x}$ という微分方程式を作る．$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x}{x^2-1}$ となり，両辺を積分して

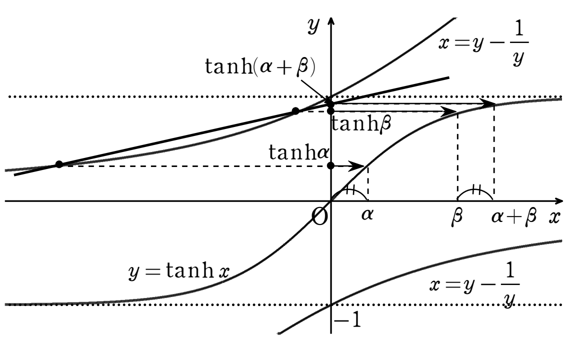


$\log|g(x)|=\log|x^2-1|+c'$ より

$g(x)=c(x^2-1)$ を得る．

したがって，同様のことが放物線 $x=-y^2+1$ と双曲線余接関数 $y=\coth x$ で成り立つことになり，確かに右図で $\alpha+\beta=\gamma$ となっている．

さらに，双曲線正接関数 $\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ においては加法定理 $\tanh(A+B)=\dfrac{\tanh A+\tanh B}{1+\tanh A\tanh B}$ が成り立つ．



ここから $x-\dfrac{g(x)}{g'(x)}=\dfrac{2x}{1+x^2}$ という微分方程式を作る．$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}=\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x}$ となり，両辺を積分して $\log|g(x)|=\log\left|\dfrac{x^2-1}{x}\right|+c'$ より $g(x)=c\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ を得る．

なお，これら 2 つの双曲線関数について，割

線の x 切片がそれぞれ $\dfrac{x_1x_2+1}{x_1+x_2}$，$\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2+1}$ になることが，簡単な計算で確認できる．

なお，これら 2 つの双曲線関数についても，それらが満たす関数方程式に特殊な値を代入する必要条件からも求めることができる．ただし，$|\tanh t|<1,\ |\coth t|>1$ であるので，特殊な値としてはそれぞれこの範囲にある値を用いる必要があることに注意する．

6　こういった曲線が存在しない例

もっと馴染みのある三角関数 $\sin t$，$\cos t$ でも決定できると面白いが，できないものだろうか．

範囲を $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に制限して $f(t)=\cos t$ で考えてみる．加法定理

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos A\cos B-\sqrt{1-\cos^2 A}\sqrt{1-\cos^2 B}$ から関数方程式を作ると

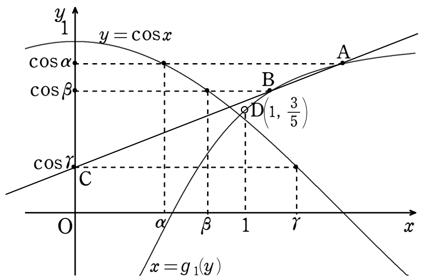
$x_1-\dfrac{(x_1-x_2)g(x_1)}{g(x_1)-g(x_2)}=x_1x_2-\sqrt{1-{x_1}^2}\sqrt{1-{x_2}^2}$ （$x_1\neq x_2$，$0\leqq x_1\leqq 1,\ 0\leqq x_2\leqq 1$）…… ③ である．

③において $x_1=\dfrac{3}{5}$，$x_2=x$ とすると，$\dfrac{3}{5}-\dfrac{\left(\frac{3}{5}-x\right)g\left(\frac{3}{5}\right)}{g\left(\frac{3}{5}\right)-g(x)}=\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}\sqrt{1-x^2}$ である．$g\left(\dfrac{3}{5}\right)=c$ として

$g(x)=\dfrac{2c(2\sqrt{1-x^2}+x)}{4\sqrt{1-x^2}-3(x-1)}$ …… ④　を得る．これを $g_1(x)$ とおく．

これが③を満たすかを調べるが，見やすくするために文字を少し変更した上で，左辺と右辺の差を

$h(a,\ b)=a-\dfrac{(a-b)g_1(a)}{g_1(a)-g_1(b)}-ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ とおく．



このとき，例えば $h\left(\dfrac{5}{13},\ \dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{4}{1235}\neq 0$ となって，③が成り立たない．$g_1(x)$ は $C_1: y=g_1(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{3}{5},\ c\right)$ を通る割線については加法定理を表示できるが，この例の 2 点 $\left(\dfrac{5}{13},\ g_1\left(\dfrac{5}{13}\right)\right)$，$\left(\dfrac{4}{5},\ g_1\left(\dfrac{4}{5}\right)\right)$ を通る割線のように，加法定理を表示できないことがある（図で $\alpha+\beta$ は γ に近いが，厳密には等しくない．なお $c=1$ とした）．

したがって，$f(t)=\cos t$ では加法定理を表示する関数は存在しない．

念のため，微分方程式を用いて $g(x)$ を求めてみる．$\cos t$ の 2 倍角の公式から，$x-\dfrac{g(x)}{g'(x)}=2x^2-1$（$|x|\leqq 1$）という微分方程式ができる．ここから $\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{1+x-2x^2}$ となり，右辺は $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ と変形できるから，両辺を積分して，$\log|g(x)|=\dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right|+c'$ より，$g(x)=c\sqrt[3]{\dfrac{2x+1}{1-x}}$ となる．

これは④と異なる形の関数であり，これについても調べると「$x_1\neq x_2$，$0\leqq x_1\leqq 1,\ 0\leqq x_2\leqq 1$ を満たすすべての x_1，x_2 について③を満たす」が成り立たないことが分かる．

$f(t)=\sin t$ についても同様で，加法定理を表示する曲線は存在しない．

7　おわりに

当初，「出題者は，たまたまこの曲線を見つけたのだろう」と思っていた．しかし，関数方程式や微分方程式によって求めることができることから，意図的に作成したものと考えるようになった．

$\cos t$ や $\sin t$ では存在しないため求められなかったが，tan 系の $\tan t$, $\cot t$，$\tanh t$，$\coth t$ でこういった平易で，しかも式的に 2 つずつ類似した曲線を決定できたのは，興味深い結果であった．

（2018 年 1 月 8 日）