縮閉線における尖点（カスプ）について

斎 木 清 治

1　はじめに

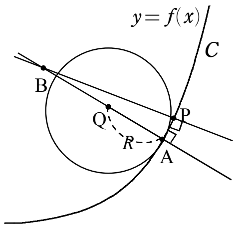
曲線 $C : y = f(x)$ の点 A (t, $f(t)$) における曲率半径 R は，

$R = \dfrac{\{1+(f'(t))^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(t)|}$ で与えられる．

また，曲率円の中心 Q の座標は

$\mathrm{Q}\left(t - \dfrac{f'(t)\{1+(f'(t))^2\}}{f''(t)},\ f(t) + \dfrac{1+(f'(t))^2}{f''(t)} \right)$ である．

点 Q の軌跡は**縮閉線**と呼ばれる．



高校数学的には，異なる 2 点 A (t, $f(t)$) , P (p, $f(p)$) における C の法線の交点を B とするとき， $p \to t$ としたときの B の極限点を Q として曲率円の中心 Q を，また AQ $= R$ として曲率半径を求めることができる．曲率 $\rho = \dfrac{1}{R}$ である．

この方針で R を求めさせたりする大学入試問題は，1995 年の防衛医大の問題を初めとして，関連する問題が散見される．

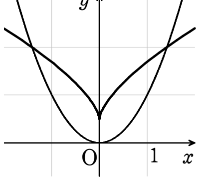
> 関数 $y = f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で， $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) > 0$ ，
> $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x) > 0$ をみたしている．曲線上の相異なる 2 点を P $(a,\ f(a))$, Q $(a+h,\ f(a+h))$ として以下の問いに答えよ．
> (1) $y = f(x)$ の点 P における法線と点 Q における法線の交点 R の座標を求めよ．
> (2) $h \to 0$ のとき，線分 PR の長さの極限値を求めよ．
> (3) $f(x) = e^x$ のとき，(2)の極限値を最小にする a の値を求めよ．　　〔1995　防衛医大〕

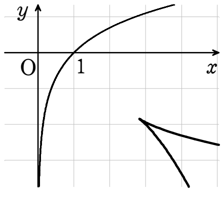
曲線 $y = f(x)$ 上の点 A における曲率円は，ざっくり言えば，A の近くで曲線 $y = f(x)$ にカーブの状態が最も似ている円のことである．

2　縮閉線

さまざまな曲線に対して縮閉線を描いてみると，興味深いことがらが浮かび上がってくる．

次の左図は $y = x^2$ の，右図は $y = \log x$ の縮閉線（太線）である．ここに挙げた例のように，多くの場合その縮閉線に「尖点」が表れる．





3　尖点の分類

尖点とは，文字通り曲線が尖った点である．それにしても,「尖」という漢字は良くできている．バラの刺のように，先が小さく付け根の方が大きくなっている状態が尖っているのである．

「尖点では微分係数が存在しない」という認識は，一応正しいとしても，その非存在の状態は同じではない．

$x = p(t),\ y = q(t)$ で表される曲線が， $t = \alpha$ で尖点となるのは，次の 3 つの場合があると考えられる（(i)を(ii)に含めることもできるが，あえて別とした）．

(i)　$\displaystyle\lim_{t \to \alpha - 0} \frac{dy}{dx} = \pm\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{t \to \alpha + 0} \frac{dy}{dx} = \mp\infty$ （複号同順）

(ii)　$\displaystyle\lim_{t \to \alpha - 0} \frac{dy}{dx} \neq \lim_{t \to \alpha + 0} \frac{dy}{dx}$（両辺とも $\pm\infty$ の場合を除外）

(iii)　$\displaystyle\lim_{t \to \alpha - 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \to \alpha + 0} \frac{dy}{dx}$ 　かつ

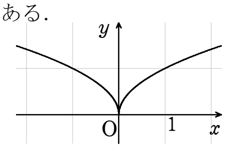
$t = \alpha$ の前後で $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ の符号が両方とも逆

具体例を載せれば，次のようである．

(i)のケース

$x = t,\ y = \sqrt{|t|}$ 　$(y = \sqrt{|x|})$

の尖点 O.

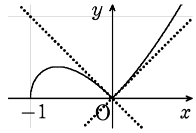


(ii)のケース

$x = t,\ y = |t|\sqrt{t+1}$

$(y = |x|\sqrt{x+1})$

の尖点 O. 　$\displaystyle\lim_{t \to \pm 0} \frac{dy}{dx} = \pm 1$.



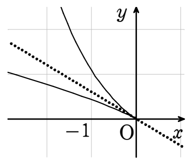
(iii)のケース

$x = -t^5 + 5t - 4,\ y = \dfrac{t^4 - 4t + 3}{t}$

の尖点 O. 　$\displaystyle\lim_{t \to 1 \pm 0} \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{5}$.

点の動きは， $t : 0 \to 1$ のとき↘

$t : 1 \to \infty$ のとき↖である．



4　縮閉線上の尖点

Q $(x,\ y)$ とすると，

$x = t - \dfrac{f'(t)\{1+(f'(t))^2\}}{f''(t)}$ ， $y = f(t) + \dfrac{1+(f'(t))^2}{f''(t)}$

であるから， $f''(t) \neq 0$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f'(t)\{f'''(t)(1+(f'(t))^2) - 3f'(t)(f''(t))^2\}}{(f''(t))^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3f'(t)(f''(t))^2 - f'''(t)(1+(f'(t))^2)}{(f''(t))^2}$$

となり， $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{f'(t)}$ である（驚!!!）から，中心 Q の曲率円と C の接点 A に対して，縮閉線は直線 AQ 方向へ動く．また，直線 AQ は縮閉線の接線である．

尖点では $\dfrac{dy}{dx}$ が存在しないが,

「 $t = \alpha$ で尖点　$\Leftrightarrow$　$f'(\alpha) = 0$ 」　は早計である．

$g(t) = f'''(t)(1+(f'(t))^2 - 3f'(t)(f''(t))^2$ とおくと，

$f''(t) \neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{g(t)}{f'(t)g(t)}$ であるから，尖点は「 $f'(t) = 0$ または $g(t) = 0$ 」を満たす t において存在する可能性がある．

なお， $f''(t) = 0$ で A が変曲点となるとき，A における曲率半径は ∞ である．

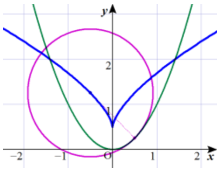
縮閉線に，尖点が多いのは，$f'(t)=0$ となる関数が多く存在し，また，カーブの様子が（当たり前だが）刻々と変わる関数がほとんどだからであろう．

具体例を挙げよう．曲率円も 1 つずつ例示した．

《例 1》　$y=x^2$

$Q\left(-4t^3,\ \frac{6t^2+1}{2}\right)$　で，

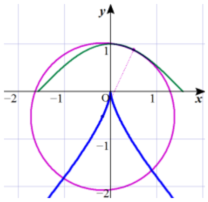
$t=0$ のときの点 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ が(i)タイプの尖点である．



《例 2》　$y=\cos x$　$\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$

$Q\left(\frac{t\cos t-\sin^3 t-\sin t}{\cos t},\ -\frac{2\sin^2 t}{\cos t}\right)$ で，

$t=0$ のときの原点 O が(i)タイプの尖点である．

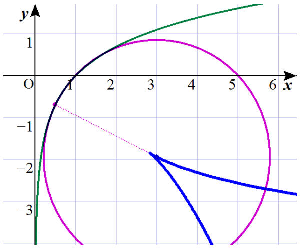


これらの例では，極値となる点に対応する曲率円の中心が尖点となっていて，(i)タイプの尖点である．

《例 3》　$y=\log x$

$Q\left(\frac{2t^2+1}{t},\ \log t-t^2-1\right)$

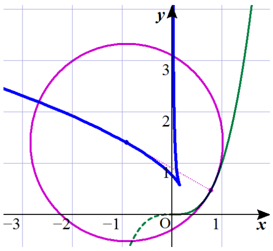
で，$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときの点 $\left(2\sqrt{2},\ -\frac{3+\log 2}{2}\right)$ が(iii)タイプの尖点である．



《例 4》　$y=x^3$ $(x>0)$

$Q\left(\frac{t(1-9t^4)}{2},\ \frac{15t^4+1}{6t}\right)$

で，$t=\frac{\sqrt[4]{1125}}{15}$ のとき点 $\left(\frac{2\sqrt[4]{1125}}{75},\ \frac{2\sqrt[4]{45}}{9}\right)$ が(iii)タイプの尖点である．



この 2 例では，$f'(t)=0$ ではなく，

$g(t)=f'''(t)(1+(f'(t))^2-3f'(t)(f''(t))^2=0$　となる t の値で尖点になっている．

実際，例えば《例 3》では $f(t)=\log t$，$f'(t)=\frac{1}{t}$，

$f''(t)=-\frac{1}{t^2}$，$f'''(t)=\frac{2}{t^3}$ から，

$g(t)=\frac{2}{t^3}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)-\frac{3}{t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)^2=\frac{2t^2-1}{t^5}$ であり，

$g(t)=0$ となる $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$（真数条件から $t>0$）で尖点となっている．

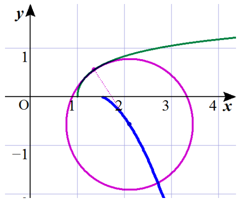
なお，$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{f'(t)}$ であるから，縮閉線には(ii)タイプの尖点は存在しない．

5　尖点を持たない例

縮閉線に，尖点が存在しないような例は，関数の定義域を適切に制限すれば作ることができる．例えば，《例 3》の $y=\log x$ において $x>1$ などの制限を付ければ，尖点は存在しない．しかし，与えられた関数の自然な定義域で考えるのが筋であるから，そのような例を挙げる．

$y=\sqrt{x}$ はその 1 つの例であるが，$y^2=x$ の制限だとの誹りを避けるならば，次が挙がる．

《例 5》　$y=\sqrt{\log x}$



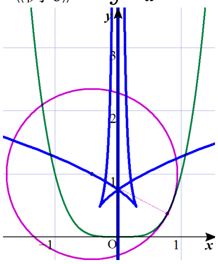
$Q\left(\frac{8t^2\log t+2t^2+1}{2t(2\log t+1)},\ \frac{2(1-2t^2)(\log t)^{\frac{3}{2}}}{2\log x+1}\right)$ で，尖点はない．

ちなみに，$g(t)=0$ の実数解は $t=0.4366\cdots$ で定義域外．

6　縮閉線の例

ここまでに挙げてない基本関数について，その縮閉線を例示する．Q は曲率円の中心，K は尖点である．

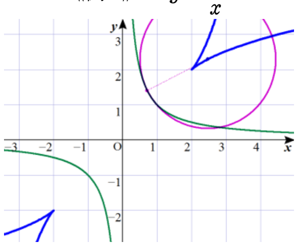
《例 6》　$y=x^4$



$Q\left(\frac{2t(1-8t^6)}{3},\ \frac{28t^6+1}{12t^2}\right)$

$K\left(\pm\frac{2\sqrt[6]{134456}}{49},\ \pm\frac{\sqrt[3]{7}}{3}\right)$

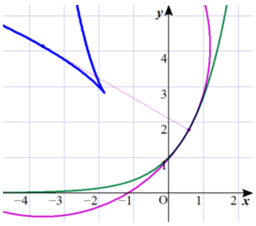
《例 7》　$y=\frac{1}{x}$



$Q\left(\frac{2t^4+1}{2t^3},\ \frac{t^4+3}{2t}\right)$

K $(2,\ 2)$

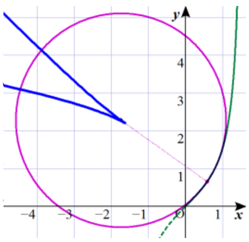
《例 8》　$y=e^x$



$Q(-e^{2t}+t-1,\ 2e^t+e^{-t})$

$K\left(-\frac{3+\log 2}{2},\ 2\sqrt{2}\right)$

《例 9》　$y=\tan x$　$\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$



Q $(x,\ y)$ とし，

$s=\sin t$，$c=\cos t$

とすると

$x=\frac{1-c^4+2tcs^3}{2sc^3}$，

$y=\frac{1+c^4+2s^2}{2sc}$

K $(-1.513\cdots,\ -2.204\cdots)$

愛知県立一宮高等学校勤務（執筆時現在）
＜On the cusp in the evolute ; Seiji Saiki＞　2014/12/24