極方程式とカム機構

斎 木 清 治

1　はじめに

高等学校の数学Ⅲ（改定後は数学C）で，極座標，極方程式を扱うが，この教材は生徒からの評判が芳しくない.

「(直交座標で事足りているのに）なぜまた新しい座標などを考えるのですか？」

「極方程式は，いろいろな図形の方程式をまた逐一覚えなくちゃいけないんですか？」

「こんなのやって，役に立つんですか？」

などなど.

これらに対して，

「ベクトルで成分表示以外に，距離と方向でベクトルを表す方法があったでしょ．それを数値化すると，極座標だね」

「基本的な方程式だけで十分で，あとは必要に応じて導ければ良いよ」

「2次曲線が，離心率 e のみで，統一的に1つの式で表せるメリットがあったね．それと，焦点弦にかかわる問題では，（直交座標と比べて）格段に少ない計算量で処理できたよね」

などと答えてみても，生徒たちの表情はなかなか晴れない.

生徒たちが，なるほど便利で役に立つものなんだと，ストンと了解してくれる教材はないものか.

そこでふと思いついたのが，カム機構である．グラフを描くソフトで容易にアニメーションを作成できるので，この制作過程を見せて，極方程式の有用性と利便性を分かってもらうというのはいかがなものか（私が今，その授業ができる条件下にないのが残念であるが).

2　カム機構の概略

工学には疎いが，最も単純なカム機構は「回転運動を往復直線運動に変換する仕組み」である程度の知識はある.

おもちゃなどにも使われていたりするから，知っている生徒も少なからずいることだろう.

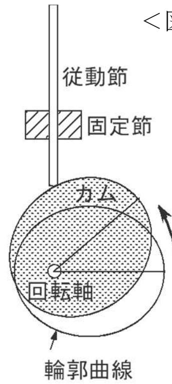
調べてみると，図1のような名称がついていることが分かった.

回転軸に固定されたカムが回転し，その輪郭に接する従動節が固定節に方向を支持されながら往復直線運動を行う.

カムの輪郭曲線の相違で，従動節の運動の状態が変わる.

カムの1回転に対応する，“角度−従動節の変位”のグラフはカム曲線と呼ばれる.

<図1>



3　カム機構と極方程式

GeoGebra を用い，O を回転軸とする輪郭曲線を描いてそれを回転させ，従動節の動きを輪郭曲線と y 軸との交点 A（従動節の下端）の運動として見て行くことにする.

カムの輪郭曲線が極方程式表示されていれば，回転したカムの極方程式は容易に求まる.

(1) 輪郭曲線からカム曲線を求める

回転する前の最初のカムの輪郭曲線が，極方程式 $r=f(\theta)$ で表されるとする.

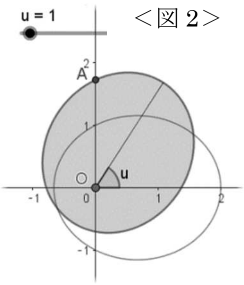
カムと従動節の接点 A と回転の中心 O との距離 OA を r ，回転角を u とするとき，回転したカムの輪郭曲線は，直交座標における平行移動と同じ感覚で，$r=f(\theta-u)$となる.

授業で扱った楕円の極方程式から，離心率 $e=0.5$ の楕円 $r=\frac{1}{1-0.5\cos\theta}$ を輪郭曲線として用いてみる．$f(x)=\frac{1}{1-0.5\cos x}$ としておく．

方程式 $r=f(\theta)$ と入力するだけで, O を焦点の 1 つとするこの楕円が描かれる．これがカムの輪郭曲線となる．これを回転させるために，回転角のスライダー（パラメータ）u を設定する．

最初の楕円を O 周りに角 u だけ回転移動させた楕円は,
$r=\frac{1}{1-0.5\cos(\theta-u)}$ なので，$r=f(\theta-u)$と入力するだけである．

デフォルトで，$u=1$ になっているので，図 2 のように O を中心に 1 ラジアン回転した楕円が現れる．u のスライダーを動かすと，対応して楕円のカムが回転して行く．　[この式設定を直交座標で行うと面倒であるが，極方程式では極めて容易である．極方程式は回転に強い！]

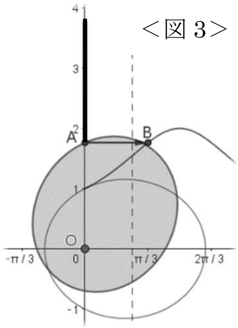


＜図 2＞

従動節の下端 A は，$\theta=\frac{\pi}{2}$ に対応する点なので，その直交座標は
A : $(0,\ f(\frac{\pi}{2}-u))$ である．u のスライダーを動かすと，A は y 軸上を上下に往復直線運動する．

uのスライダーをアニメーションオンにすれば, カムは自動的に回転し，点 A は上下往復運動する．

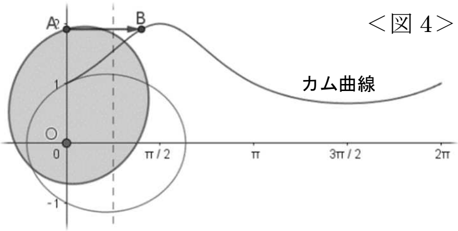
図 3 のように A を下端点とする適当な一定の長さの従動節（太線分）を描いておけば，これが上下運動して，よりカム機構っぽく見える．



＜図 3＞

点 B : $(u,\ f(\frac{\pi}{2}-u))$の軌跡の方程式は直交座標表示で，$y=f(\frac{\pi}{2}-x)$ であるから，これを 1 周分描けば，それが図 4 のようなカム曲線となる．

カム曲線の接線の傾きが従動節の速度に対応するから, 感覚的な表現だが, この楕円カムでは A の最高点前後の速さは，A の最下点前後の速さよりも大きいことが分かる．



＜図 4＞

ここまでを整理すると

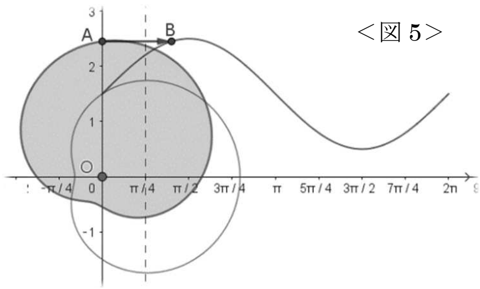
周期が 2π で，$f(x)>0$ を満たす連続関数 $f(x)$ に対して，
曲線 $r=f(\theta)$ を輪郭曲線とするカムのカム曲線の方程式は $y=f(\frac{\pi}{2}-x)$である．
ただし，カムの回転の中心は O であり，従動節は y 軸上にあるものとする．

(2) カム曲線から輪郭曲線を求める

$y=f(\frac{\pi}{2}-x)$において $\frac{\pi}{2}-x=s$ とすれば，$x=\frac{\pi}{2}-s$ であるから，周期が 2π，$f(x)>0$ を満たす連続関数 $f(x)$ に対して，カム曲線が $y=f(x)$ であるようなカムの輪郭曲線の極方程式は $r=f(\frac{\pi}{2}-\theta)$ となる．

例えば, カム曲線が $y=\frac{3}{2}+\sin x$ となるカムの輪郭曲線は，$r=\frac{3}{2}+\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$ すなわち
$r=\frac{3}{2}+\cos\theta$ である．

このカムの輪郭曲線はリマソン（カージオイドは，リマソンの特殊形）と呼ばれる図 5 のような曲線である．A は y 軸上の線分上を単振動する．



＜図 5＞

このリマソン形をしたカムは，実際に機械などに使われているだろうと思われる．

(3)　従動節が等速運動するカム

カム曲線が直線となれば良いが，定数関数以外には周期が $2\pi, f(x) > 0$ を満たす連続関数 $f(x)$は存在しない．そこで，周期が 2π の折れ線であるようなカム曲線で考える．

全くたまたまだが，本誌第 90 号に『繰り返し関数を作る』で提案した方法で，この条件を満たす関数を作ることができる．

周期が 2π の三角波として，

$f(x) = -|x - 2\pi[(x + \frac{\pi}{2})/(2\pi)] - \frac{\pi}{2}\ | + 4$

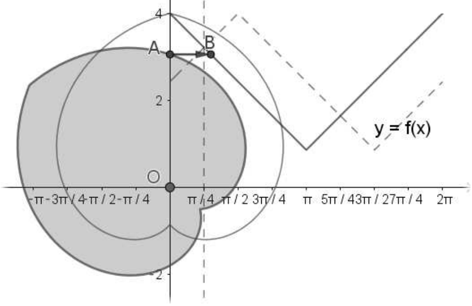
（グラフは，図 6 の破線）を用いて，カムの輪郭曲線とカム曲線を図示すれば図 6 のようになる．

なお, ここでは $y = f(x)$ を $y = \sin x + c$ の形に合わせて,「山+谷」のスタイルで考えた．

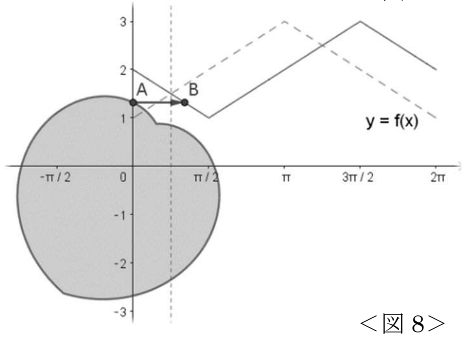
しかし,「山」だけの形（図 7 の破線）にしても，図 7 のように同様のハート形の輪郭曲線になる．

このハート形をしたカムも，恐らく実際に使われているだろうと思われる．

＜図 6＞



＜図 7＞



(4) 小さい周期で往復直線運動するカム

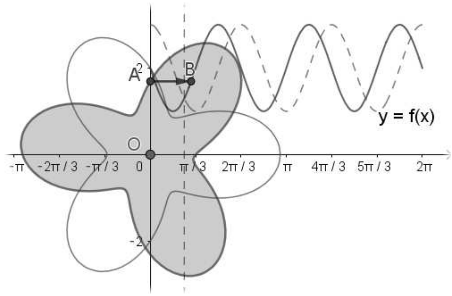
例えば，周期が π, $\frac{2\pi}{3}$ などで往復直線運動するカムは, 軸の回転速度を調整するのが 1 つの方法だが, 1 つの回転軸に複数のカムを設置し，周期が異なる往復直線運動を設定したいということもあるだろう．

n を自然数として $\frac{2\pi}{n}$ の周期ならば，基本周期が $\frac{2\pi}{n}$ の関数 $f(x)$ を用意するだけである．

例えば，周期が $\frac{2\pi}{3}$ のものとして，

$f(x) = 2 + \cos 3x$ を用いれば図 8 のようになる．

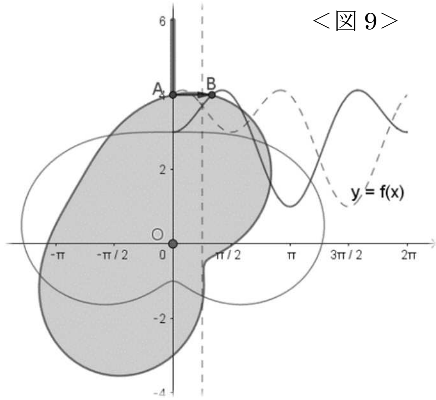
＜図 8＞



(5)　もう少し複雑な往復運動をするカム

$f(x) = \cos 2x + \sin x + 3$ で作ったカムは図 9 のような勾玉の形である．アニメーションを見ればその運動が良くわかるが，カム曲線からその運動を類推していただこう．

＜図 9＞



4　おわりに

GeoGebra というツールの助けを借りてだが, 極方程式の興味深い有効な用途が見えた．

カム曲線として三角関数を使えば周期が 2π である関数を用意することは簡単である (折れ線などは, ややハードルが高いが）から，図やアニメーションの作成も難しくない．

ぜひ，授業教材としてご利用いただきたい．

（2022 年 2 月 22 日）