

ある分数関数の出生の秘密

斎木 清治

【抄 録】微分法を用いてその増減を調べる(1次式)/(2次式)の形の分数関数のうち、分母の判別式が負であるような関数について、それが有理数で極値を持つように係数決定する方法と、その背景を明らかにした。

【キーワード】 数学 微分法 関数 極値 問題作成

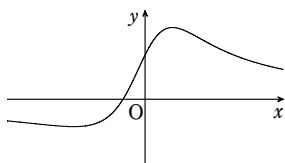
1 はじめに

微分法を用いてその増減を調べる分数関数について、かつて明らかにしたことがらがある¹⁾。その中のあるタイプの分数関数について、図形的な意味を考察することができた。

2 かつて明らかにしたことの概略

$$y = \frac{ax+b}{(x-p)^2+q^2} \quad (a \neq 0, q \neq 0) \text{ という形の}$$

関数は、グラフが次のようであって、必ず極大値と極小値を持つ。



その極値を与える x の値が“きれいな”値であるためには、(y' の分子) $=0$ から、2次方程式 $ax^2+2bx-(ap^2+aq^2+2bp^2)=0$ の実数解が“きれいな”値であること、すなわち判別式から $D/4=a^2q^2+(ap+b)^2$ が完全平方数であることが必要十分である。

具体的には (a, b, p, q) の組合せとして

- (i) $ap+b=0$ とし、 q を整数とする。
 $(1, -1, 1, 1), (1, -2, 2, 1), (1, 0, 0, 2)$ など.
- (ii) $aq, ap+b$ をピタゴラス数の小さい2数とする。
 $(3, \pm 4, 0, 1), (4, \pm 3, 0, 1)$ など.
- (iii) その他
 $(2, 0, \pm 1, \sqrt{3})$ など.

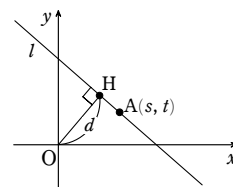
が挙げられる。

3 関連するある問題

次の問題を考えよう。

平面上の定点 $A(s, t)$ ($st \neq 0$) を通る傾

き m の直線 l と
 原点 O との距離
 $OH = d$ の最大値
 と最小値を求め
 よ。



まずは計算によって、解いてみよう。

$$l: y = m(x-s) + t \quad \text{すなわち}$$

$$l: mx - y + t - ms = 0 \quad \text{より}$$

$$d = \frac{|t - ms|}{\sqrt{m^2 + 1}} \text{ であるから } d^2 = \frac{(ms - t)^2}{m^2 + 1}.$$

$$\text{ここで, } f(m) = \frac{(ms - t)^2}{m^2 + 1} \text{ とおくと,}$$

$$f(m) = s^2 + \frac{-2stm + t^2 - s^2}{m^2 + 1} \text{ であるから}$$

$$f'(m) = \frac{2(sm - t)(tm + s)}{m^2 + 1} \text{ となる.}$$

$$f'(m) = 0 \text{ とすると, } m = \frac{t}{s}, -\frac{s}{t}.$$

$$f''(m) = -\frac{2\{2stm^3 + 3(s^2 - t^2)m^2 - 6stm - s^2 + t^2\}}{(m^2 + 1)^3}$$

から

$$f''\left(\frac{t}{s}\right) = \frac{2s^4}{s^2 + t^2} > 0, \quad f''\left(-\frac{s}{t}\right) = -\frac{2t^4}{s^2 + t^2} < 0$$

となる。従って $f(m)$ は極小値 $f\left(\frac{t}{s}\right) = 0$ と

$$\text{極大値 } f\left(-\frac{s}{t}\right) = s^2 + t^2 \text{ をとる.}$$

$$\text{ところで, } \lim_{m \rightarrow \pm\infty} f(m) = s^2, \quad 0 < s^2 < s^2 + t^2$$

であるから $f(m)$ の最大値は、 $f\left(-\frac{s}{t}\right) = s^2 + t^2$,

最小値は $f\left(\frac{t}{s}\right) = 0$ である。よって、 d は最大値

$\sqrt{s^2+t^2}$, 最小値0をとる.

しかし, この問題は図を考えれば答はすぐに分かる. l が原点 O を通るとき, $d=0$ となってこれが最小値. また, l が線分 OA に垂直なとき $d=OA$ でこれが最大値である.

4 この形の分数関数を探す

2 で取りあげた形の分数関数が, 3 の問題の中に隠れている.

それは, $f(m)-s^2 = \frac{-2stm+t^2-s^2}{m^2+1}$ の右辺である.

実際, この右辺に $m = \frac{x-p}{q}$,

$$s = \frac{\sqrt{a^2(p^2+q^2)+2abp+b^2}-(ap+b)}{\sqrt{2q}},$$

$$t = \frac{\sqrt{a^2(p^2+q^2)+2abp+b^2}+(ap+b)}{\sqrt{2q}},$$

を代入すると, $\frac{ax+b}{(x-p)^2+q^2}$ を得る.

したがって, 3 の問題を利用して 2 で取りあげた形の関数を作ることが出来, s, t を “きれいな” 値にとれば, “きれいな” 値で極値を持つこの形の分数関数を作ることが出来るというわけである.

5 この形の関数を作る

関数を作るためには, 直線 l の方程式が単純な方が作り易い. 3 の問題で点 A が原点 O に来るように全体を平行移動し, s, t の符号を変えて,

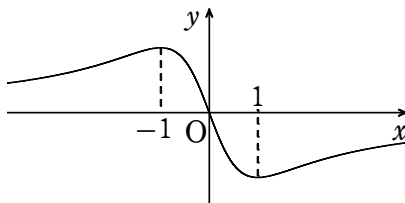
直線 $y = mx$ と点 $P(s, t)$ との距離で考えよう.

【例 1】 点 $P(1, 1)$ を考えると

$$d^2 = \frac{(m-1)^2}{m^2+1} = 1 + \frac{-2m}{m^2+1} \quad \text{であるから,}$$

$$f(x) = -\frac{2x}{x^2+1} \quad \text{を作ることが出来る. これ}$$

は P の座標から, $x = \pm 1$ で極値を持つはずである. 実際, グラフは次の通りである.



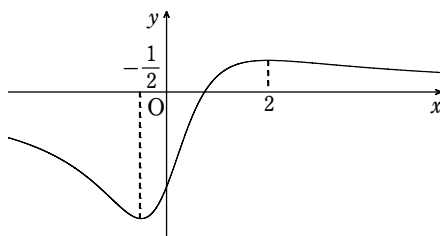
【例 2】 点 $P(1, 2)$ を考えると

$$d^2 = \frac{(m-2)^2}{m^2+1} = 1 + \frac{-4m+3}{m^2+1} \quad \text{であるから,}$$

$$f(x) = \frac{4x-3}{x^2+1} \quad \text{を作ることが出来る (符号を変え}$$

た). これは P の座標から, $x = 2, -\frac{1}{2}$ で

極値を持つはずである. 実際, グラフは次の通りである.



【例 3】 【例 1】 で作った関数に対して平行移動を加えて x に $x-1$ を代入すれば

$$f(x) = -\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1} \quad \text{が得られる.}$$

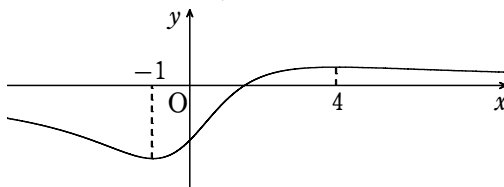
この関数は $x = 0, 2$ 極値を持つ.

【例 4】 【例 2】 で作った関数 $f(x) = \frac{4x-3}{x^2+1}$ に

対して $x = \frac{u}{2}$ を代入し, 4 で割って変数 u を x

に変えれば $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+4}$ が得られる.

この関数は $x = -1, 4$ で極値を持つ.



ここで示したような方法によって, バラエティに富んだ関数を作ることが出来る.

6 かつて明らかにしたこととの関連

2 の (i) は $s+t=0$ の場合で, 4 の最後に示した式のうち s と t を $s=-\sqrt{\frac{a}{2q}}=-t$ とした形になっている. つまり, 点 P が直線 $x+y=0$ 上にある場合である.

ところが, この方法で作り, 【例 4】のような変形を行ったとき, できる関数 $\frac{ax+b}{x^2+q^2}$ の q^2 を平方数でない数 $k(>0)$ にするためには, 【例

4】の方法で代入する式を $x=\frac{u}{\sqrt{k}}$ とすることになる. これだと, 分子の式に根号が入り込むことになる. そこで, 2 の (iii) のタイプの関数を作るには, $a=\frac{a'}{\sqrt{k}}$ のような形になっていると

よい. よって, s, t のいずれか一方を, $\frac{r}{\sqrt{k}}$ (r : 有理数) の形の数にとればよい.

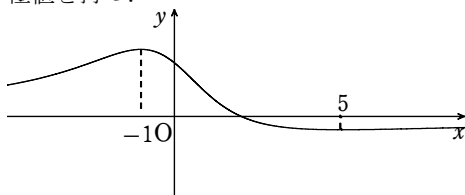
実際, 2 の (iii) の関数における, m, s, t を求めてみると, $m=\frac{x-1}{\sqrt{3}}, s=\frac{1}{\sqrt{3}}, t=-1$ である.

逆に, 例えば $P\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$ として $\frac{2(2-\sqrt{5}m)}{5(m^2+1)}$

が出来, $m=\frac{x}{\sqrt{5}}$ を代入すると

$$f(x)=\frac{-2(x-2)}{x^2+5} \text{ という関数が得られる.}$$

この関数のグラフは次のようで, $x=-1, 5$ で極値を持つ.



7 この関数の逆数の関数

ここで作った関数の逆数をとった関数は,

$$y=\frac{ax+b}{(x-p)^2+q^2} \quad (a \neq 0, q \neq 0) \text{ に対して}$$

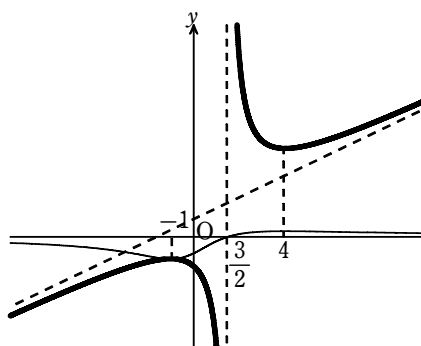
$$\frac{1}{f(x)}=\frac{x}{a}-\frac{2ap+b}{a^2}+\frac{(ap+b)^2+a^2q^2}{a^2(ax+b)} \text{ となり,}$$

これは 2 直線 $x=-\frac{b}{a}, y=\frac{x}{a}-\frac{2ap+b}{a^2}$ を漸近線とする双曲線をグラフに持つ. しかも, 極大値・極小値を 1 つずつ持ち, それを与える x の値は $f(x)$ の極値を与える x の値に等しい.

従って, そのようなタイプの関数決定に利用することもできるが, 他の方法が使いやすい関数を作ることが出来るように思われる¹⁾.

【例 5】 【例 4】で作った関数 $f(x)=\frac{4x-3}{x^2+1}$

の逆数の関数 $y=\frac{x^2+1}{4x-3}$ のグラフが次の太線である.



8 参考文献

1) 斎木清治: 高校数学 きれいに解ける問題作り, 黎明書房, 1988

この書籍は, 2007 年に『高校数学 問題づくりの道具箱』(プレアデス出版) として改訂増補された.