母比率推定問題の設定

斎 木 清 治

1　はじめに

高等学校のカリキュラムが新課程に変わって，数学 B の「統計的な推測」の履修が増えているように思われる．Yahoo 知恵袋を継続的に見ていて，「統計的な推測」の質問の激増からその増加現象が推察される．旧課程にも「確率分布と統計的な推測」が数学 B の教科書に載ってはいたものの，履修選択しない学校がほとんどだったはずである．
新課程で数学 B の内容が「数列」「統計的な推測」「数学と社会生活」になり，履修内容として「数列」だけでは済まなくなったため，この激増が生じているかと思われる．
その知恵袋の質問には，教科書の問，練習問題や問題集の問題などを丸投げする不埒な輩が残念ながら多いのだが，そういった質問を別にして，いくつかの内容が集中的に質問されている．
その 1 つが，母比率を推定する際の計算についての質問である．

2　質問内容と問題点

まず，母比率推定の内容を確認する．

> 標本の大きさ n が大きいとき，標本比率を R とすると，母比率 p に対する信頼度 95%の信頼区間は，$R-1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}} \leq p \leq R+1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$

質問は，具体的な R, n に対して，$1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$ の計算方法が分からないというものである．
例えば，$1.96\sqrt{\dfrac{0.04(1-0.04)}{800}} \fallingdotseq 0.014$ とあるが，どう計算したらよいのかといったものである．
この質問のポイントは 2 つあって，1 つは$\sqrt{\ }$の中の計算をどうするかであり，もう 1 つは$\sqrt{\ }$が外れない場合の近似値計算をどうするかである．
$\sqrt{\ }$の中の値を計算して 0.000048 にするのは 1 つの手であり，$\sqrt{0.000048}=0.001\sqrt{48}=0.004\sqrt{3}$ とできれば一先ず良いのだが…．
分子を小数表示から分数表示にするのがもう 1 つの手で，
$\sqrt{\dfrac{0.04(1-0.04)}{800}}=\sqrt{\dfrac{4}{100}\times\dfrac{96}{100}\times\dfrac{1}{800}}=\sqrt{\dfrac{2^2\times6\times4^2}{100^2\times2^3\times10^2}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{100\times10}=\dfrac{4\sqrt{3}}{1000}$ とするのも良い．
その上で，$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.732$ を用いて計算するのだろう．
試験問題ではこの$\sqrt{3}$ などの近似値が与えられることが多いと思われるが，教科書の問や問題集ではそういった配慮がなく，そのこともこういった質問の原因の 1 つになっていると考えられる．
質問箱には$\sqrt{69}$ の登場する問題もあり，近似値が示されていなければ計算は手強い．
手もとにあるある教科書の例題は，R=0.36, n=400 のケースを扱っていて，
$\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}=\sqrt{\dfrac{0.36\times0.64}{400}}=\dfrac{0.48}{20}=0.024$ となり，近似値計算が不要になっている．
このような例題は計算が楽で良いのだが，授業中では$\sqrt{\ }$の外せない入り組んだ計算上の注意については触れていないこともあるのだろう．「計算するだけだから」という指導者側の安易な意識と，この分野の指導に不慣れな教材を進めるのに手いっぱいで，生徒がこの計算で困るかも知れないということにまで思いが至っていないのではないかとも考えられる．
とは言え，試験などではこの例題のように，$\sqrt{\ }$の出てこないような設定にするというニーズがあるはずで，その方法を探る．

3　$\sqrt{\ }$の出ない設定

この教科書の問題のように，$\sqrt{\ }$の出てこないような設定にする方法はいくつか考えられる．
右表は，R を 1%〜50% として$\sqrt{R(100-R)}$ % の値を求めたものである．

(1)　$\sqrt{R(1-R)}$ が有理数となるとき
n が平方数であれば，$\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$ は有理数である．
これは，右表のグレーの場合であり，例えば $R=2\%=\dfrac{2}{100}$ の場合
n が平方数 400 であれば，$\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}=\dfrac{14}{100}\times\sqrt{\dfrac{1}{400}}=\dfrac{14}{100}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{7}{1000}$
のようになる．
先の教科書の例題は，この R=36%, n=400 のケースに当たる．

(2)　$\sqrt{R(1-R)}=p\sqrt{q}$ (p： 有理数；q：平方数でない自然数) のとき
$\sqrt{n}$ を $k\sqrt{q}$ $\big(k$：自然数$\big)$すなわち $n=k^2\,q$ の 形にすれば，
$\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}=\dfrac{p}{k}$ という有理数になる．
具体的には，$R=\dfrac{5}{100}=5\%$ のとき，$\sqrt{R(1-R)}=\dfrac{5\sqrt{19}}{100}$ であるから，
例えば $n=1900$ とすれば，$\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}=\dfrac{1}{200}$ となる．

(3)　R を%にこだわらない有理数に設定するとき（右表とは関連しない）
$a,\ b,\ c$ を$a^2+b^2=c^2$ をみたす自然数（ピタゴラス数）とする．
このとき$n=c^2$ とし，$R=\dfrac{a^2}{c^2}$ とすると，$1-R=\dfrac{b^2}{c^2}$ であり，
$\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}=\dfrac{ab}{c^2}\times\dfrac{1}{c}$である．
例えば，$a=5, b=12$ のとき，$c^2=169, R=\dfrac{25}{169}, 1-R=\dfrac{144}{169}$
であるから，$\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}=\dfrac{5\times12}{169}\times\dfrac{1}{13}=\dfrac{60}{2197}$ となる．
「169 個の製品を取り出して検査したら,そのうち 25 個が不良品であった．母集団の不良品率について信頼度 95%の信頼区間を求めよ」といった問題設定である．
$\sqrt{\ }$の出てこないような設定ではあるが，割り算が辛いかも知れない．

4　おわりに

生徒の計算力の低下が指摘されて久しく，改善の傾向を聞かない．こういった中で，いたずらに計算に時間を採られてしまうような出題はできれば避けたい．そういった観点で，この設定の考察をしてみた．
しかし現実には，95%の場合の 1.96 を掛ける部分の計算でも，内容が小学校の算数とは言え，時間もかかり面倒だと考える生徒は少なくない．
$1.96=\left(\dfrac{7}{5}\right)^2$ というきれいな事実が使える設定も考えてみたが，上手い利用を見つけることは残念ながらできなかった．せいぜい，n を 7 や 49 の倍数にするくらいのことか．[1990 年頃には，1.96 の代わりに 2 が許容されていたはずなのだが⋯]

(2024 年 3 月 5 日)

R	$\sqrt{R(100-R)}$
1	$3\sqrt{11}$
2	14
3	$\sqrt{291}$
4	$8\sqrt{6}$
5	$5\sqrt{19}$
6	$2\sqrt{141}$
7	$\sqrt{651}$
8	$4\sqrt{46}$
9	$3\sqrt{91}$
10	30
11	$\sqrt{979}$
12	$4\sqrt{66}$
13	$\sqrt{1131}$
14	$2\sqrt{301}$
15	$5\sqrt{51}$
16	$8\sqrt{21}$
17	$\sqrt{1411}$
18	$6\sqrt{41}$
19	$9\sqrt{19}$
20	40
21	$\sqrt{1659}$
22	$2\sqrt{429}$
23	$\sqrt{1771}$
24	$4\sqrt{114}$
25	$25\sqrt{3}$
26	$2\sqrt{481}$
27	$3\sqrt{219}$
28	$12\sqrt{14}$
29	$\sqrt{2059}$
30	$10\sqrt{21}$
31	$\sqrt{2139}$
32	$8\sqrt{34}$
33	$\sqrt{2211}$
34	$2\sqrt{561}$
35	$5\sqrt{91}$
36	48
37	$3\sqrt{259}$
38	$2\sqrt{589}$
39	$\sqrt{2379}$
40	$20\sqrt{6}$
41	$\sqrt{2419}$
42	$2\sqrt{609}$
43	$\sqrt{2451}$
44	$4\sqrt{154}$
45	$15\sqrt{11}$
46	$6\sqrt{69}$
47	$\sqrt{2491}$
48	$8\sqrt{39}$
49	$7\sqrt{51}$
50	50