第 78 号の高木レポートについて

斎 木 清 治

1　はじめに

初等数学第 78 号（2016 年 3 月号）において，高木和久先生が『長方形の四隅から長方形を切り取ってできる箱の容積について』として，第 76 号に掲載された拙レポートに関連することを執筆されている．

この高木レポートのポイントは,「微分法を用いずにこの内容にどう迫ることができるか」にあると考えられる．

2　ポイントの整理

ここで取り上げる問題内容を整理すると，「1 枚の長方形の紙の四隅から合同な正方形を切り取って折り曲げ，蓋のない箱を作るとき，その容積を最大にするにはどのようにしたらよいか」である．

1 辺の長さが a の正方形の紙の場合，四隅から 1 辺の長さが $\dfrac{a}{6}$ の正方形を切り取ればよいが結論である．

一般的には微分法を用いて解くが，代わりに相加平均・相乗平均の関係を用いて，次のように解くというのが，高木レポートの「微分法を用いない解法」である．

切り取る正方形の 1 辺の長さを $x\left(0<x<\dfrac{a}{2}\right)$ とすると，

$$V=x(a-2x)^2=x\left(4\cdot\frac{a-2x}{4}\right)^2=16x\left(\frac{a-2x}{4}\right)\left(\frac{a-2x}{4}\right)$$

$$\leqq 16\left\{\frac{1}{3}\left(x+\frac{a-2x}{4}+\frac{a-2x}{4}\right)\right\}^3=\frac{16}{27}\left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{2}{27}a^3.$$

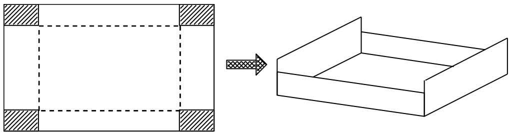
ここで，等号は $x=\dfrac{a-2x}{4}=\dfrac{a-2x}{4}$ すなわち，$x=\dfrac{a}{6}$ のときに成り立ち，このとき V は最大である．

これと同様に横, 縦の長さがそれぞれ $a,\ b$（便宜的に $b\leqq a$ としておく）の長方形の紙の場合はどうかということである．

微分法によれば 1 辺が $\dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ の正方形を 4 隅から切り取ると容積 V が最大になることが分かる．

「微分法を用いない」という条件下で考えたいので，高木レポートでは四隅から紙と相似な長方形（相似比 t ）を切り取って箱を作るという条件に変更して考えている．このとき，$t=\dfrac{1}{6}$ で V が最大になる（高木レポートでは $\dfrac{2}{3}$ としてあるが，記載ミスと思われる）．

しかし，これでは箱を作ったとき「高さ」が不揃いで無駄が出る．



そのため，この切り取る長方形の横，縦の長さの相加平均 $\dfrac{a+b}{12}$ を 1 辺とする正方形を切り取ることにし，これが「微分法を使わずに，相加平均と相乗平均の関係を使って求める場合」の容積最大の場合ではないかと，高木レポートは述べている．

3　長方形の場合の微分法を用いない解法

実は，長方形の場合であっても，正方形の場合と同様に，相加平均・相乗平均の関係を用いてこの問題を正確に解くことができる．

用いる道具が道具だけに，いささか技巧的であることはお許しいただきたい．

とりあえず，具体例から始める．

横，縦の長さがそれぞれ 16，10 の長方形の紙で考える．1 辺の長さが x の正方形を切り取るとき $0<x<5$ であり，$V=x(16-2x)(10-2x)$ である．ここで，

$$x+p(16-2x)+q(10-2x)=16p+10q\quad\text{かつ}$$
$$x=p(16-2x)=q(10-2x)$$

を満たす正数 $p,\ q$ を求めると，$p+q=\dfrac{1}{2}$，

$p=\dfrac{x}{16-2x},\ q=\dfrac{x}{10-2x}$ から，

$\dfrac{x}{16-2x}+\dfrac{x}{10-2x}=\dfrac{1}{2}$ となり，これを解くと

$x=2,\ \dfrac{20}{3}$ となるが，$0<x<5$ より $x=2$ で，

したがって，$p=\dfrac{1}{6},\ q=\dfrac{1}{3}$ である．

すると，

$$V=x(16-2x)(10-2x)$$
$$=6\cdot 3x\cdot\frac{1}{6}(16-2x)\cdot\frac{1}{3}(10-2x)$$
$$\leqq 6\cdot 3\left\{\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{6}(16-2x)+\frac{1}{3}(10-2x)\right)\right\}^3$$
$$=6\cdot 3\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{16}{6}+\frac{10}{3}\right)\right\}^3=6\cdot 3\cdot 2^3.$$

ここで，等号は $x=\frac{1}{6}(16-2x)=\frac{1}{3}(10-2x)$ すなわち，$x=2$（$0<x<5$ より）のとき成立する．したがって，V は $x=2$ のとき最大となる．

これを一般化すればよい．

1 辺の長さが x の正方形を切り取るとき，$0<x<\frac{b}{2}$ で，底面の長方形の横，縦の長さはそれぞれ $a-2x,\ b-2x$ で，$V=x(a-2x)(b-2x)$ である．

ここで，正数 $p,\ q$ に対して，

$x+p(a-2x)+q(b-2x)=ap+bq$　かつ

$x=p(a-2x)=q(b-2x)$

を満たす x $\left(0<x<\frac{b}{2}\right)$ について調べる．

すると $p+q=\frac{1}{2}$ で，$\frac{x}{a-2x}+\frac{x}{b-2x}=\frac{1}{2}$ から，

$2x\{(a-2x)+(b-2x)\}=(a-2x)(b-2x)$ ……(*)

すなわち $12x^2-4(a+b)x+ab=0$ となり，

$x=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ を得る．

このうち $\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}=x_0$ とおくと，$(a-b)^2<a^2-ab+b^2<(a+b)^2$ であることから，$0<x_0<\frac{b}{3}\left(<\frac{b}{2}\right)$ であることが分かる．

この正定数 x_0 は

$x_0+p(a-2x_0)+q(b-2x_0)=ap+bq$　かつ

$x_0=p(a-2x_0)=q(b-2x_0)$ を満たすから

$p=\frac{x_0}{a-2x_0},\ q=\frac{x_0}{b-2x_0}$ であって，この正定数 $p,\ q$ に対して，

$$V=x(a-2x)(b-2x)=\frac{xp(a-2x)q(b-2x)}{pq}$$

$$\leqq\frac{1}{pq}\left\{\frac{1}{3}(x+p(a-2x)+q(b-2x))\right\}^3$$

$$=\frac{(pa+qb)^3}{27pq}.$$

ここで，等号は $x=p(a-2x)=q(b-2x)$ のとき，すなわち $x=x_0$ のとき成り立ち，このとき，V が最大となる．

4　おわりに

結果を予知して無理な変形をしたきらいはあるが，相加平均・相乗平均の関係を用いて問題を解く場合には割とよくあることだと認識している．

この 1 枚の紙から作る箱の容積最大問題については，生徒から教えられたことも含め興味深く，また奥も深い幾多の事実を学ばせてもらっている．微分法を用いずこの問題を解くこの手法も，その 1 つとして記憶にとどめたい．

ご教示に感謝する．

なお，(*)の左辺は箱の側面積，右辺は底面積で，それらが等しい場合に，容積が最小になる．このことに関しては，熊野充博先生の次のレポートが参考になる．

「NOTE　箱作り―容積最大の箱の秘密？　側面積と底面積の意外な関係」　『数学セミナー』（2006 年 9 月号）pp.41．

愛知県立一宮高等学校勤務

2016 年 2 月 23 日