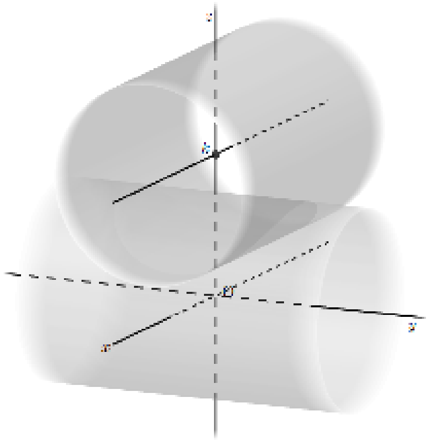
直角に交差する 2 円柱の交線

斎 木 清 治

1　はじめに



教える現場を離れてテーマ探しに苦労する. web 上の質問サイトが，テーマの漁り場である.

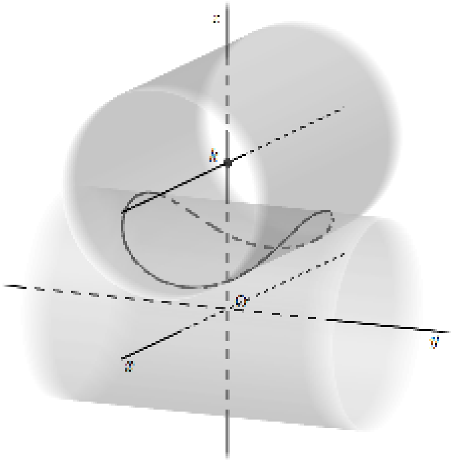
質問は,「二つの円柱があるとき，一方を水平に，他方を直角にして交わらせた時，最初は離れていてくっつき始めてからの交線は円に見えますか？」

交線は，円柱上の曲線であって円ではない．しかし，ある方向から見たら円に見えるのだろうか.

2　設定と交線の方程式

まず，1 つの円柱を $x^2+z^2=1\cdots$① とする．これと軸が垂直で，z 軸方向へ k だけ持ち上げた同半径の円柱は $y^2+(z-k)^2=1\cdots$② である. ここで, $-2\leq k\leq 2$であるが，対称性を考えれば，$0\leq k\leq 2$ で考えればよい.

右上図は GeoGebra で描いた．GeoGebra には 2 曲面の交線を表示する機能が備わっているが, 複雑な曲面には対応していない．この 2 円柱ですら，非対応である．したがって，それを求めざるを得ない.



①から，$x=\cos t$，$z=\sin t$と おくと，②から

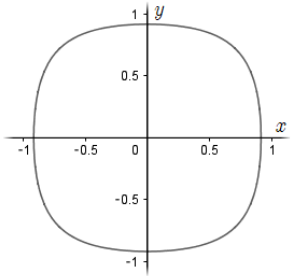
$y=\pm\sqrt{1-(\sin t-k)^2}$と なるから，交線のパラメータ表示は,

$(\boldsymbol{\cos t},\ \pm\sqrt{\boldsymbol{1-(\sin t-k)^2}},\ \boldsymbol{\sin t})$

となる.

これを図に追加すると，右のようになる.

3　z 軸方向から眺める



この交線の xy 平面への正射影は,

$(\boldsymbol{\cos t},\ \pm\sqrt{\boldsymbol{1-(\sin t-k)^2}})$

であり, 右図の$k=1.4$の ケースでは, 右のような閉曲線である.

これは円ではないが，　他の k の値ではどのような曲線になるのであろうか.

k の値を 0.2 刻みで変化させたものが次ページの通り．右側の立体図には，xy 平面への正射影も載せてある.

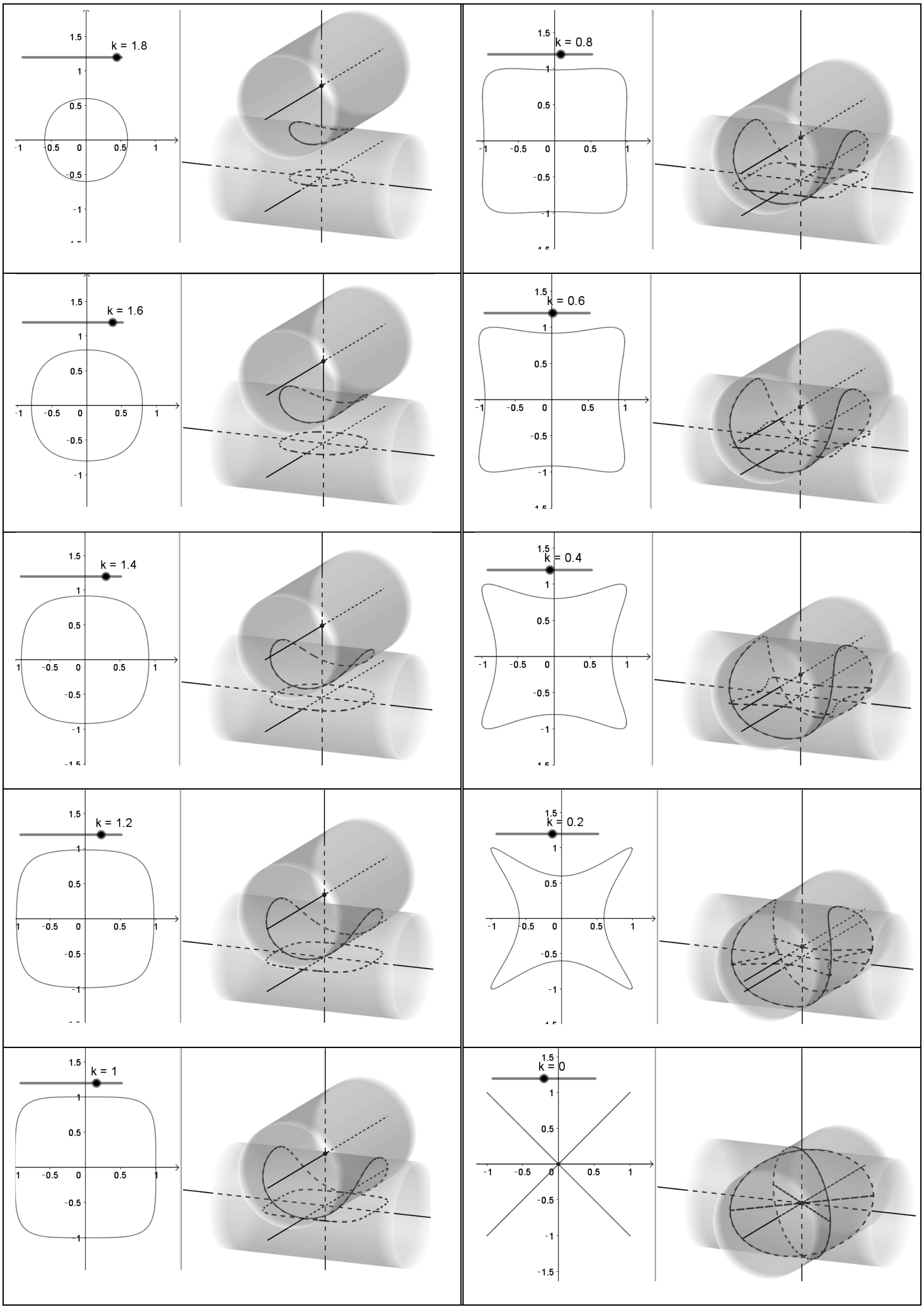
この曲線の陰関数表示が,

$(\boldsymbol{x^2-y^2})^2+\boldsymbol{2k^2}(\boldsymbol{x^2+y^2})=\boldsymbol{k^2}(\boldsymbol{4-k^2})$

であることが，tの 消去によって分かる.

外側に凸の閉曲線が，kの 値 の減少に伴って，次第に内側に凹んでいく様は，非常に興味深い.

最後の$k=0$の ケースが，軸が直交するおなじみの図形である．このケースでは，x 軸方向，または y 軸方向から見たとき，交線（2 つの楕円）は円に見えるが，質問者はこのことを聞いているのではないはずであり,「円に見えることはない」を回答としてよかろう.


k = 1.8
k = 0.8
k = 1.6
k = 0.6
k = 1.4
k = 0.4
k = 1.2
k = 0.2
k = 1
k = 0

4　半径が異なるとき

1 つの円柱を $x^2+z^2=r^2\cdots$③　と　$y^2+(z-k)^2=1\cdots$②で 考える．なお，$k>1$とする．

また，共有点があるとき$k\leq|r+1|$で ある．

③から，$x=r\cos t$，$z=r\sin t$と おくと，②から

$y=\pm\sqrt{1-(r\sin t-k)^2}$と なるから，交線のパラメータ表示は，

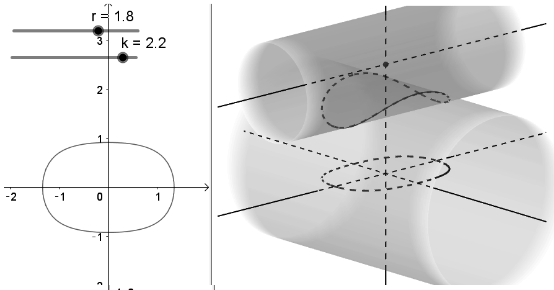
$(\boldsymbol{r\cos t},\ \pm\sqrt{\boldsymbol{1-(r\sin t-k)^2}},\ \boldsymbol{r\sin t})$

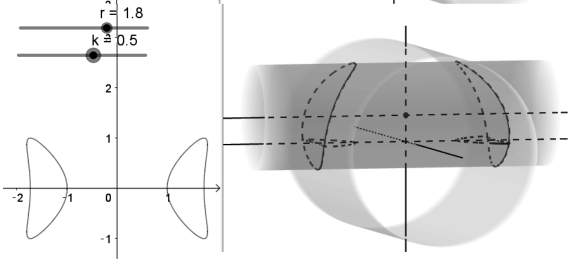
となる．

$r=1.8$と して，様子を見ていく．

右図のように, 先の同半径のケースに類似する交線になる場合もあるが, 実は全く異なる交線が登場する場合がある．

それは, 半径の小さい円柱が他方の円柱を貫通する場合があるためである．このとき，右下図のように，交線は 1 つの閉曲線にはならず, 2 つに分かれてしまう(トンネルの入口と出口に相当)．$0\leq k\leq r+1$で 考えれば，このような貫通は，$0\leq k<r-1$の 場 合に起こる．

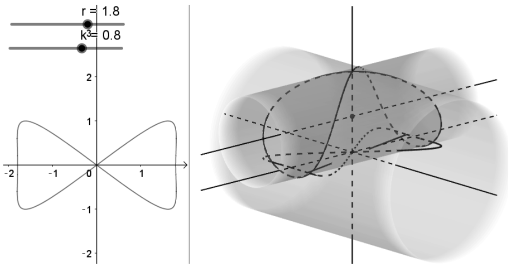


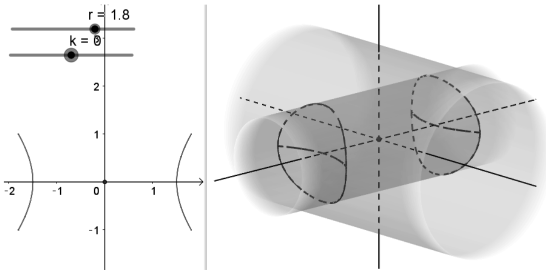


その他，特徴的な場合の図を，下に 2 つ並べて載せる．

下左図は貫通に至る直前の$k=r-1$の 状態で，これより下がると貫通状態になる．交線は空間内の 8 の字の形である．こんな軌道のジェットコースターがありそうだ．

下右図は 2 円柱の軸が交わる$k=0$ の場合で，xy 平面の上部と下部が合同の状態であり，交線の xy 平面への正射影は 2 個の弧になる. この弧は計算すると, $r=1.8$のとき, 双曲線 x^2-y^2=56/25 の一部である［ 一般には，双曲線 $x^2-y^2=r^2-1$ の一部となる].





5　終わりに

空間図形は頭の中では，その形をなかなかイメージしづらい．百聞は一見に如かずで，こういった図を描くと分かり易くなる．GeoGebra では，実際には 2 円柱の色を変えて区別し易くしたり，図形を回転させて様々な方向から立体を見たりすることができる．前頁の図も，kの スライダを動かすだけで，瞬時にその変化の様子を見ることができる．そのような操作により，さらに空間理解が深まっていく．

2021 年 3 月 20 日

第 90 号『繰り返し関数を作る』の訂正：

p.55 【例 4】の方程式にミスがありました．

$g(x)=(x-2\sqrt{3}\left[\frac{x}{2\sqrt{3}}\right]-\sqrt{3})^3-3(x-2\sqrt{3}\left[\frac{x}{2\sqrt{3}}\right]-\sqrt{3})$

が正しい式です．

お詫びして，訂正します．