「$\dfrac{1}{9091}$ 二次曲面」について

斎 木 清 治

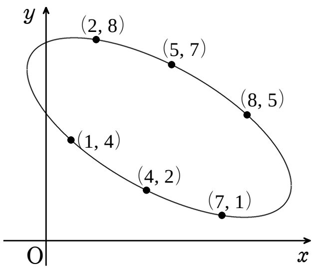
1　はじめに

本誌第 79 号の拙稿「1/7 楕円と Midy の定理」は，本誌に投稿する半年ほど前に『数学セミナー』の NOTE に投稿した内容とほぼ同じである. NOTE になかなか載らなかったため，ボツになったと思って若干の改稿を加えて本誌に投稿した後，NOTE に掲載されたという経緯である.

『数学セミナー』の NOTE (2016 年 7 月号)で，ZZZ 氏から 3 次元への拡張として,「$\dfrac{1}{n}$ 楕円面」などの有心二次曲面が決定できるかも知れないとのご指摘をいただいた.

そういった拡張ができるかどうか考察する.

2　「$\dfrac{1}{7}$ 楕円」について



最初に,「$\dfrac{1}{7}$ 楕円」について確認しておく.

$\dfrac{1}{7}$ は素数 7 を分母に持つ単位分数で, 長さ 6 の循環節 142857 を持つ．この循環節の数字配列から巡回的に座標を構成した異なる 6 点 (1, 4), (4, 2), (2, 8), (8, 5), (5, 7), (7, 1) が，驚くことに 1 つの楕円上に存在する.

その理由に循環小数に関する Midy の定理が関係している [1].

3　3 次元への拡張

Midy の定理にかかわらせて，$\dfrac{1}{n}$ の n は素数としてきているので，n を素数として話を進める.

3 次元空間内の二次曲面 S はその方程式が 10 個の項を持つから,

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fzx+gx+hy+iz+j=0$$

は一般に，どの 4 点も同一平面上にない 9 点によって確定する.

$\dfrac{1}{n}$ の循環節の長さが 10 であるものを探す.

$10^{10}-1$ が 9999999999＝3^2･11･41･271･9091 と素因数分解できることから，分母を素数とする単位分数で，循環節の長さが 10 となるものを探すと,

$\dfrac{1}{9091}=0.00010999890001099989\cdots$ のみである.

ここで，この循環節から巡回的に 3 次元空間内の異なる 10 個の点

$A_0(0, 0, 0)$，$A_1(0, 0, 1)$，$A_2(0, 1, 0)$，$A_3(1, 0, 9)$，$A_4(0, 9, 9)$，$A_5(9, 9, 9)$，$A_6(9, 9, 8)$，$A_7(9, 8, 9)$，$A_8(8, 9, 0)$， $A_9(9, 0, 0)$を構成する.

これらのうち, 原点 O(＝A_0)を除く 9 点を通るような S の方程式を $a=1$ として求めると，t を任意定数として

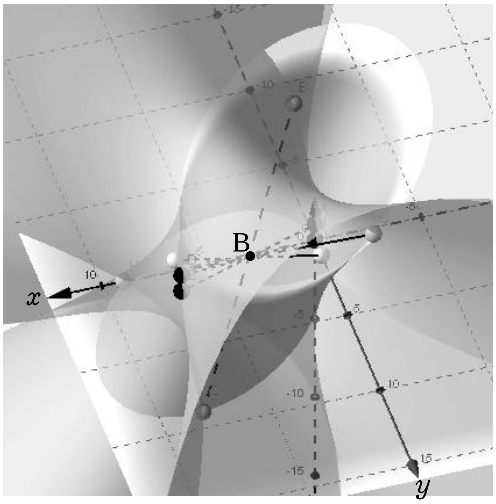
$$x^2+ty^2+\frac{1-t}{8}z^2-\frac{9t-1}{9}xy-\frac{7t+1}{9}yz+\frac{9t-1}{9}zx-9x-ty+\frac{t-1}{8}z=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

となり，これが必ず O を通ることが分かる．

また，$a=0$ として求めると，

$$y^2-\frac{1}{8}z^2-xy-\frac{7}{9}yz+zx-y+\frac{1}{8}z=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

となり，これも O を通る．



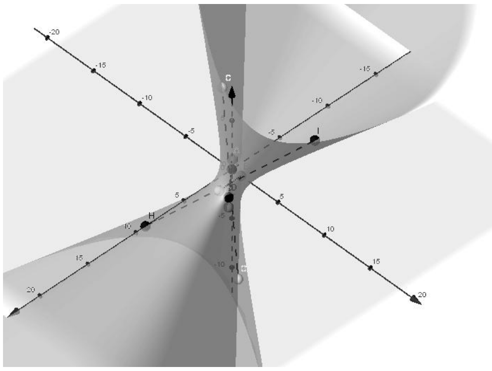
このように，「$\frac{1}{9091}$ 二次曲面」は無数にあって，1 つには確定しない．

①のうちの 2 曲面を描いてみた．

$t=1$ とした曲面が z 軸方向に開口して見える曲面，$t=-0.5$ とした曲面が y 軸方向に開口して見える曲面で，ともに一葉双曲面である．

また，図中に微小球が 9 つあるが，これらが 9 点 A_1～A_9 であり，曲面はどちらもこれらの 9 点および O(＝A_0)を通っている．

これらの 10 個の点は，A_i，A_{5+i} $(0 \leqq i \leqq 4)$ が点 B$\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$に関して対称な位置にある（これは Midy の定理によるものである）．それらを結ぶ 5 本の破線分が 1 点(B)で交わっている様子が曲面の裏側に透けて見える．点 B がこれらの二次曲面の中心になる．



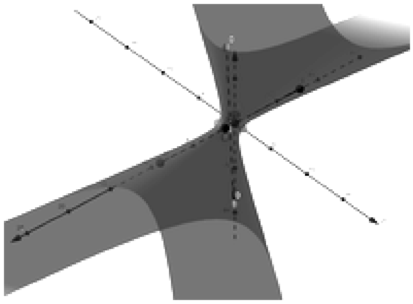
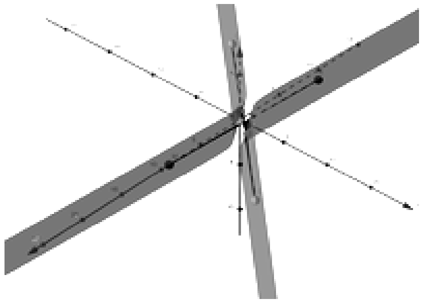
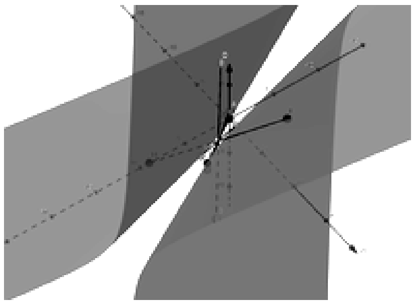
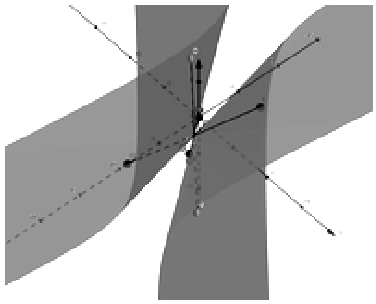
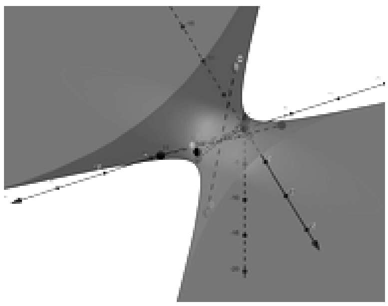
②の曲面は右のような一葉双曲面である．

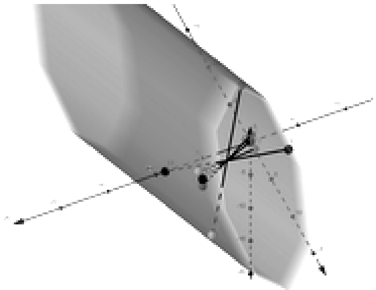
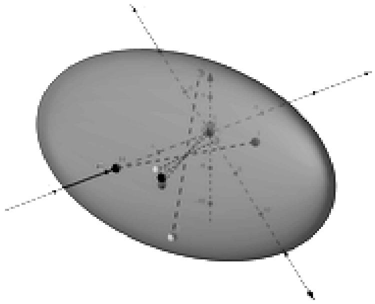
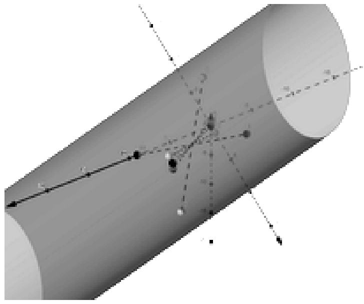
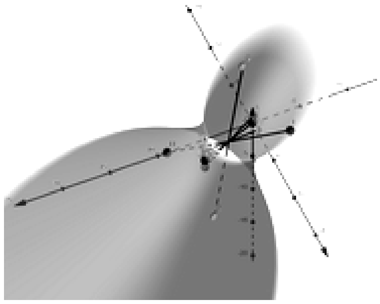
「$\frac{1}{9091}$ 二次曲面」が無数にあって 1 つに確定しない理由は，例えば，4 点 A_1 と A_6，A_2 と A_7 をとると，これらの 4 点は点 B を含む 1 つの平面上に存在し，「どの 4 点も同一平面上にない 9 点」の条件を満たさないからである．

したがって，3 次元への拡張として，「$\frac{1}{n}$ 楕円面」などの有心二次曲面は存在するが，一意には決定できないということである．

4 「$\frac{1}{9091}$ 二次曲面」の分類

パラメータ t を含む①の二次曲面 S は，行列 $\begin{pmatrix} 72 & 4(1-9t) & 4(9t-1) \\ 4(1-9t) & 72t & -4(7t+1) \\ 4(9t-1) & -4(7t+1) & 9(1-t) \end{pmatrix}$ の固有方程式の定数項 $\Delta=16(567t^3+6399t^2-1919t+73)$ に対する方程式 $\Delta=0$ の解（近似値表示した）$\alpha \approx 0.248512,\ \beta \approx 0.0447423$，$\gamma \approx -11.5789$ と，不変式 $D(\mu)=0$（参考文献 2）参照）の定数項 $D=(7t+73)\Delta$ に対する方程式 $D=0$ の解，$\alpha,\ \beta, \gamma, \delta=-\frac{73}{7} \approx -10.428571$（$\gamma<\delta<\beta<\alpha$ の大小関係にある）を以て，次の表のように分類される [2)].

$t<\gamma$	一 葉 双 曲 面	
$t=\gamma$	双 曲 柱 面	
$\gamma<t<\delta$	二 葉 双 曲 面	
$t=\delta$	二 次 錐 面	
$\delta<t<\beta$	一 葉 双 曲 面	

$t=\beta$	楕円柱	
$\beta<t<\alpha$	楕円面	
$t=\alpha$	楕円柱	
$\alpha<t$	一葉双曲面	

5　参考文献

1) 斎木清治(2016),「1/7 楕円と Midy の定理」,『初等数学』第 79 号

2) 石川栄助(1960),「二次曲面の分類」,『岩手大学学芸学部研究年報』第 16 巻（Web 上に存在）

愛知県立一宮高等学校勤務

＜On “1/9091 Quadrics”＞　2016/10/26