「$\frac{1}{7}$楕円」と Midy の定理

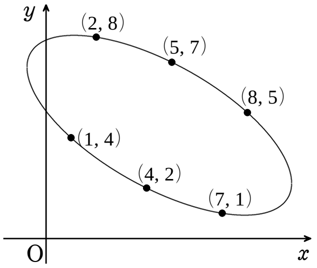
斎 木 清 治

1　はじめに

平面上の一般の 2 次曲線は 6 つの係数を用いて $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ と表されるので，どの 3 点も一直線上にないような 5 点を通る 2 次曲線が一意に定まる．

Wolfram　MathWorld というサイトの http://mathworld.wolfram.com/One-SeventhEllipse.html に，これに関連する興味深い記述がある．

$\frac{1}{7}$ は循環小数であり，その値は $0.142857142857\cdots=0.\dot{1}4285\dot{7}$ である．この長さ 6 の循環節 142857 の数字配列から，巡回的に座標を構成した異なる 6 点(1, 4), (4, 2), (2, 8), (8, 5), (5, 7), (7, 1) が，1 つの楕円上に存在するというのである．



その楕円は「One-Seventh Ellipse」と名付けられていて，ちなみに，その方程式は次の通りである．

$$19x^2+36xy+41y^2-333x-531y+1638=0 .$$

なぜこのようなことが起きるのかの理由を明らかにしたい．

2　2 次曲線上の対称点

まず，次のことを示す．

【定理 1】　2 次曲線 G 上に 4 点があって，このうちの 2 点ずつが点 P に関して対称な位置にあるとき，G は点 P に関して対称である．

＜証明＞ 平行移動と回転（という合同変換）によって，P が原点 O に，1 組の対称点が x 軸上にあるとして一般性を失わない．このとき，$g(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ に対して，G が $g(x,y)=0$ で表される 2 次曲線とする．

ここで，$y=0$ とした方程式 $ax^2+dx+f=0$ の 2 つの実数解が，x 軸上に存在する対称点の x 座標であり，対称の中心が O であるから，$d=0$ であり，$g(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+ey+f$ となる．

もう 1 組の対称点が

直線 $x=0$ 上に存在する場合；$cy^2+ey+f=0$ において，先と同様に $e=0$ となる．

直線 $y=kx\ (k\neq 0)$ 上に存在する場合；

$ax^2+bkx^2+ck^2x^2+ekx+f=0$ が x の 2 次方程式で，この 2 つの実数解がもう 1 組の対称点の x 座標を与え，対称の中心が O であるから，$ek=0$ で，$k\neq 0$ から $e=0$ となる．

よって，$g(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+f$ となり，$g(-x,-y)=g(x,y)$ であるから，G は O に関して対称である．（終）

結局，2 次曲線上に対称の中心が同じ 2 組の対称点が存在するとき，その 2 次曲線は有心 2 次曲線（楕円または双曲線）であり，対称の中心はその 2 次曲線の中心であることが分かった．

さて，6 つの実数 $a_i\,(1\leqq i\leqq 6)$ が，条件

$a_1+a_4=a_2+a_5=a_3+a_6\ (=k)$ を満たすとき，

6 点 A1 $(a_1,\ a_2)$，A2 $(a_2,\ a_3)$，A3 $(a_3,\ a_4)$，A4 $(a_4,\ a_5)$，A5 $(a_5,\ a_6)$，A6 $(a_6,\ a_1)$ については，

A1 と A4，A2 と A5，A3 と A6 は，点 C$\left(\frac{k}{2},\ \frac{k}{2}\right)$ に関して対称な位置にある．

これらの異なる 6 点のうちのどの 3 点も同一直線上にないとき，5 点 A1，A2，A3，A4，A5 を通る 2 次曲線 F が 1 つ確定する．

よって，F 上に 5 点 A1，A2，A3，A4，A5 があり，A1 と A4, A2 と A5, A3 と A6 が点 C$\left(\frac{k}{2},\ \frac{k}{2}\right)$ に関して，対称な位置にあるとき，定理 1 により，F は点 C に関して対称な有心 2 次曲線であるから，点 A6 も F 上に存在することになる．

したがって，次の定理が成り立つ．

【定理 2】　6 つの実数 $a_i\,(1\leqq i\leqq 6)$ が，

$a_1+a_4=a_2+a_5=a_3+a_6\ (=k)$ を満たすとする．

異なる 6 点 A1 $(a_1,\ a_2)$，A2 $(a_2,\ a_3)$，A3 $(a_3,\ a_4)$，A4 $(a_4,\ a_5)$，A5 $(a_5,\ a_6)$，A6 $(a_6,\ a_1)$ に対して，これらの 6 点のうちのどの 3 点も同一直線上にないならば，この 6 点を通る有心 2 次曲線が存在する．

3　Midy の定理との関係

さて，循環小数に関する次のような Midy の定理(Midy1836)がある．

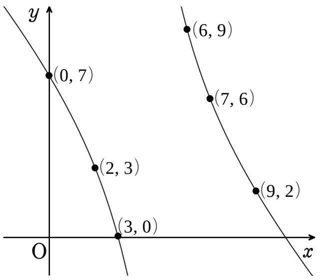
> P を素数とする．$\dfrac{1}{P}$ が偶数の長さの循環節を持ち，$0.\overline{Q_1Q_2\cdots Q_jQ_{j+1}Q_{j+2}\cdots Q_{2j}}$ であるとき，$Q_i+Q_{j+i}=9\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ j)$ が成り立つ．

定理 2 と Midy の定理により，長さ 6 の循環節 142857 をもつ $\dfrac{1}{7}$ に対して，異なる 6 点 (1, 4), (4, 2)，(2, 8)，(8, 5)，(5, 7)，(7, 1) は，点 $\left(\dfrac{9}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$ を中心とする有心 2 次曲線上にあることが分かる．結果的にそれが楕円であったということである．

4 「$\dfrac{1}{13}$ 双曲線」

$10^6-1=999999=3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$ であるから，循環節の長さが 6 で，分母を素数とする単位分数の可能性があるのは，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{11}$，$\dfrac{1}{13}$，$\dfrac{1}{37}$ である．このうち実際に循環節の長さが 6 となるのは，$\dfrac{1}{7}$ と $\dfrac{1}{13}$ に限られる．

$\dfrac{1}{13}=0.076923076923\cdots=0.\overline{076923}$ であり，この循環節から構成した異なる 6 点(0, 7), (7, 6), (6, 9)，(9, 2)，(2, 3)，(3, 0)は，下図のように 1 つの双曲線上に存在する．その方程式は $141x^2+134xy+9y^2-1872x-684y+4347=0$ である．

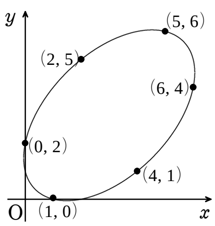


「$\dfrac{1}{13}$ 双曲線」とでも呼べば良いだろうか．

中心は点 $\left(\dfrac{9}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$ である．

5 いくつかの注意

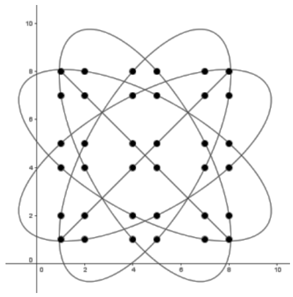
(1) このような性質を持つ循環小数は分母を素数とする分数である必要は必ずしもなく，例えば $\dfrac{1}{39}=0.\overline{025641}$ であり，$0+6=2+4=5+1=6$ であるから，ここから同じように構成した異なる 6 点は，点 (3, 3) を中心とする右のような 2 次曲線 $x^2-xy+y^2-3x-3y+2=0$（楕円）上に存在する．



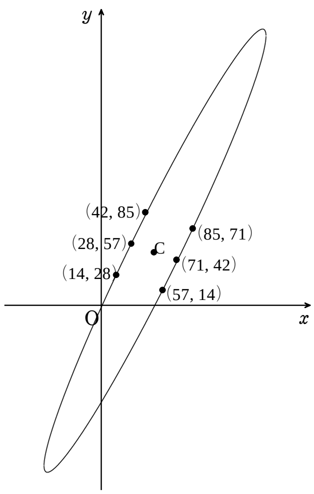
このような分数が存在する（というか，条件に合うように作ることができる）．

ただ，$\dfrac{335}{3003}=0.\overline{111555}$（単位分数ではないが）のような場合，同様に 6 点を構成しても同じ点が登場して，実質 4 点しかできないので，これらの点を通る 2 次曲線が確定しない．

(2) $\dfrac{1}{7}$ 楕円では，循環節 142857 からこの順に巡回的，しりとり的に 6 点の座標を構成したが，他にも 1 つ飛ばしで，(1, 2)，(4, 8)，(2, 5)，(8, 7)，(5, 1)，(7, 4)のように構成した 6 点も 1 つの楕円上に存在する．同様に 3 つ飛ばしなども考えることができるが，6 点が同一直線上に並んで 2 次曲線が存在しないこともあるので注意が必要である．



(3) このサイトに記載されたもう 1 つの楕円は，$\dfrac{1}{7}$ の循環節 142857 から 2 桁の整数を巡回的に座標として構成した 6 点 A1(14, 28), A2 (42, 85), A3(28, 57)，A4(85, 71)，A5(57, 14)，A6(71, 42) が載るものである．6 点が 2 点ずつ，点 C(49.5, 49.5) に関して対称な位置にあって，点 C を中心とする 2 次曲線（楕円）である．



定理とは若干条件が異なるものの，14+85，42+57, 28+71 などがすべて 99 に等しいことから，同様な性質に基づくものである．

同様の座標構成で 6 点は，3 桁では一直線，4 桁，5 桁では双曲線上に存在する．

愛知県立一宮高等学校勤務

＜" $\dfrac{1}{7}$ Ellipse" and Midy's theorem＞

2016 年 4 月 6 日