雑感　打ち消し合いの見せ方

■　例の質問箱に,「答えは 7/12 なのですが、部分分数分解したあとの状態からの各項の打ち消しがわかりません」として，右の無限級数が登場.

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+2}{n^3-n}$$

■　これについた回答のうちの 2 つは

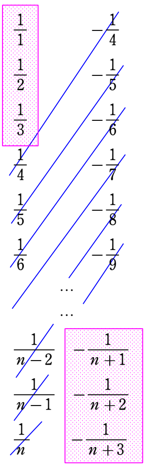
「(1/2){(3/n-1) -4/n +1/(n+1)} よって分母が 4 以降のものは打ち消し合うので 与式=(1/2)(3/2+3/3 -4/3) =(1/2)(9-2)/6 =7/12」と

「(n+2)/(n^3-n)=1/2*(3/(n-1)-4/n+1/(n+1))
2Σ[n=3,∞]=3/2-4/3+1/4+3/3-4/4+1/5+3/4-4/5+1/6+3/5-4/6+1/7+...
=3/2-4/3+3/3+1/4-4/4+3/4+1/5-4/5+3/5+...+1/n-4/n+3/n+...
=3/2-4/3+3/3 =3/2-1/3 =9/6-2/6 =7/6
2Σ[n=3,∞]=7/6 なので Σ[n=3,∞]=7/12」

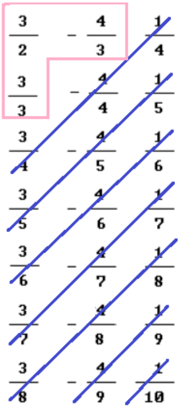
いずれも$\frac{n+2}{n^3-n}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n-1}-\frac{4}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$ という部分分数分解を用いていて，本質的には同じ回答だが, これでは打ち消しはわかりづらいままだ.

■　$\frac{k+2}{k^3-k}$を，まず $\frac{A}{(k-1)k}+\frac{B}{k(k+1)}$の形に分解し，
$\frac{k+2}{k^3-k}=\frac{3}{2}\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{2}\frac{1}{(k+1)k}$とした後に $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$の分解をすると打ち消しが鮮明で，$k$=3～$n$ の和は $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}\right)$
→ $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{12}$ (n→∞)　とできる[と回答した].
これは，分母k^3-kが連続する 3 つの自然数の積になっているので，まず，連続する 2 つの自然数の積を分母に持つ分数に分解すると式の仕組みがよく見えるからである.

■　上の$\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$，$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$の打ち消しは分り易いが，例えば$\frac{3}{k(k+3)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}$ の和などは具体的に書き出してみても分りづらいと感じる生徒が多いのは，式を横にずらずら並べて書いていくためである.
これを右のように縦に書き表すと打ち消しが鮮明になり，左上の 3 つの項が残るから，対応して右下の 3 つの項が残ることも明瞭になる．これを板書すると効果観面である.



実は，この質問の問題でも$\frac{n+2}{n^3-n}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n-1}-\frac{4}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$の$\frac{3}{n-1}-\frac{4}{n}+\frac{1}{n+1}$ 部分の最初の 7 項分を同じように縦書きにしてみると左のようになり，そのようなやや面倒な部分分数分解でも打ち消しがよく分かり，対応して残る右下の逆 L 字型の 3 項も書き出せるだろう.



■　さて，最初の質問だが，この後，右下のような回答が出現し，質問者はこれをベストアンサーに選んだ.
この回答の最大の問題点は，2 行目から 3 行目にかけて，収束性を明らかにしないまま，無限和を 2 つの無限和に書き直したことにあり，数学的には不適切な式変形である.
仮に有限和だとしても，この変形は分り易いものではない．さらに，3 行目から 4 行目にかけての 2 つの途中式変形レベルの相違は褒められたものではない.
分らないから質問をするのだが，わからない人の中にはこのようにわからないまま不適切な回答を選んでしまうというのは，仕方ないことなのだろうか（こういった不適切なものが，ずっと残っていく）.

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+2}{n^3-n}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{3}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$
$$=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$
$$=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{12}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

2025 年 06 月 01 日