雑感　平方根の近似値のある計算方法

■「$\sqrt{13}$ の近似値を求めるにはどうしたらよいか」などといった質問が，例の質問箱によく寄せられている．高校で統計が本格的に取り扱われるようになって，標準偏差の値の近似値などでこういった質問が少し増えている印象がある．
教科書や問題集の解答などで，何の断りもなく，「$\sqrt{13}≒3.61$ だから」などと書かれていて，こういった疑問の発生源である．
こういった質問に対して，①「開平法を使う」，②「$3^2<13<4^2$，$3.6^2<13<3.7^2,\ldots$のように計算して挟み込む」といった回答が寄せられる．
①は面倒な計算方法を覚える必要がある．②は初歩的な方法だが，試行錯誤などにも時間もかかる．

■　$\sqrt{a}$ の近似値計算に有効な次の方法がある．

> **a に近い平方数を b とするとき，**
>
> $$\sqrt{a}\fallingdotseq\frac{\sqrt{b}}{2}\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{2b}\right)$$

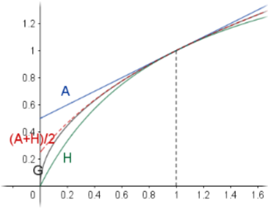
が成り立つ．
これを用いると，例えば $\sqrt{13}$では，a=13,
$4^2-13=3<13-3^2=4$ から $b=16(=4^2)$ とし

$$\sqrt{13}\fallingdotseq\frac{\sqrt{16}}{2}\left(\frac{2\cdot13}{13+16}+\frac{13+16}{2\cdot16}\right)=3.605603448\ldots$$

となるが，$\sqrt{13}=3.6055512\ldots$なので非常に近い近似値が得られている．
1 から 100 までの整数 a について，(計算を簡単にするため) b を整数として$\sqrt{a}$ の近似値を上の近似式で計算した値 R と，$\sqrt{a}$ の値を計算したものが右の表である(小数第 5 位を四捨五入した)．一致しない値をグレイで示した(ほとんどが 0. 0001 の誤差)が，$\sqrt{2}$ を除けば四捨五入して小数第 3 位まで一致する．
例えば$\sqrt{13}$ について，この計算結果≒3.6056…を用いて，$\sqrt{13}$ ≒3.61 であることを示すには，
「$3.605^2=12.99\ldots<13<3.61^2=13.03\ldots$から」，とすればよい．

■　この近似式は，次の不等式から生まれた．
良く知られているように，正数 a, b について，
　調和平均 H≦相乗平均 G≦相加平均 A
の関係から　$\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ が成り立つ．
ここで，等号は $a=b$のとき成立するが，
$a\fallingdotseq b$のとき，$\frac{2ab}{a+b}\fallingdotseq\sqrt{ab}\fallingdotseq\frac{a+b}{2}$　であり（実は $G-H\fallingdotseq A-G$の関係があり※），$G\fallingdotseq\frac{H+A}{2}$
すなわち，$\sqrt{ab}\fallingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{2ab}{a+b}+\frac{a+b}{2}\right)$ である．
この式の両辺を b で割って$\sqrt{\frac{a}{b}}\fallingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{a+b}+\frac{a+b}{2b}\right)$.
この両辺に$\sqrt{b}$ を掛ければ上の近似式を得る．

※　a=x, b=1 のときのグラフ．x≒1 のところに注目．



■　表は a が整数のものだが，もちろん 9.8 などの小数でも使えるのは言うまでもない．

■　この近似式は，計算上「割り算」の煩雑さはあるものの，a≧3 程度を注意すれば精度が高く有用なものである．

■　なお，この近似式については，
https://cosmos.art.coocan.jp/sp/sp55.pdf を参考にした．感謝を含めてここに記す．

a	b	R	$\sqrt{a}$
1	1	1.0000	1.0000
2	1	1.4167	1.4142
3	4	1.7321	1.7321
4	4	2.0000	2.0000
5	4	2.2361	2.2361
6	4	2.4500	2.4495
7	9	2.6458	2.6458
8	9	2.8284	2.8284
9	9	3.0000	3.0000
10	9	3.1623	3.1623
11	9	3.3167	3.3166
12	9	3.4643	3.4641
13	16	3.6056	3.6056
14	16	3.7417	3.7417
15	16	3.8730	3.8730
16	16	4.0000	4.0000
17	16	4.1231	4.1231
18	16	4.2426	4.2426
19	16	4.3589	4.3589
20	16	4.4722	4.4721
21	25	4.5826	4.5826
22	25	4.6904	4.6904
23	25	4.7958	4.7958
24	25	4.8990	4.8990
25	25	5.0000	5.0000
26	25	5.0990	5.0990
27	25	5.1962	5.1962
28	25	5.2915	5.2915
29	25	5.3852	5.3852
30	25	5.4773	5.4772
31	36	5.5678	5.5678
32	36	5.6569	5.6569
33	36	5.7446	5.7446
34	36	5.8310	5.8310
35	36	5.9161	5.9161
36	36	6.0000	6.0000
37	36	6.0828	6.0828
38	36	6.1644	6.1644
39	36	6.2450	6.2450
40	36	6.3246	6.3246
41	36	6.4031	6.4031
42	36	6.4808	6.4807
43	49	6.5575	6.5574
44	49	6.6333	6.6332
45	49	6.7082	6.7082
46	49	6.7823	6.7823
47	49	6.8557	6.8557
48	49	6.9282	6.9282
49	49	7.0000	7.0000
50	49	7.0711	7.0711
51	49	7.1414	7.1414
52	49	7.2111	7.2111
53	49	7.2801	7.2801
54	49	7.3485	7.3485
55	49	7.4162	7.4162
56	49	7.4833	7.4833
57	64	7.5498	7.5498
58	64	7.6158	7.6158
59	64	7.6811	7.6811
60	64	7.7460	7.7460
61	64	7.8103	7.8102
62	64	7.8740	7.8740
63	64	7.9373	7.9373
64	64	8.0000	8.0000
65	64	8.0623	8.0623
66	64	8.1240	8.1240
67	64	8.1854	8.1854
68	64	8.2462	8.2462
69	64	8.3066	8.3066
70	64	8.3666	8.3666
71	64	8.4262	8.4261
72	64	8.4853	8.4853
73	81	8.5440	8.5440
74	81	8.6023	8.6023
75	81	8.6603	8.6603
76	81	8.7178	8.7178
77	81	8.7750	8.7750
78	81	8.8318	8.8318
79	81	8.8882	8.8882
80	81	8.9443	8.9443
81	81	9.0000	9.0000
82	81	9.0554	9.0554
83	81	9.1104	9.1104
84	81	9.1652	9.1652
85	81	9.2195	9.2195
86	81	9.2736	9.2736
87	81	9.3274	9.3274
88	81	9.3808	9.3808
89	81	9.4340	9.4340
90	81	9.4868	9.4868
91	100	9.5394	9.5394
92	100	9.5917	9.5917
93	100	9.6437	9.6437
94	100	9.6954	9.6954
95	100	9.7468	9.7468
96	100	9.7980	9.7980
97	100	9.8489	9.8489
98	100	9.8995	9.8995
99	100	9.9499	9.9499
100	100	10.0000	10.0000

2026 年 3 月 1 日