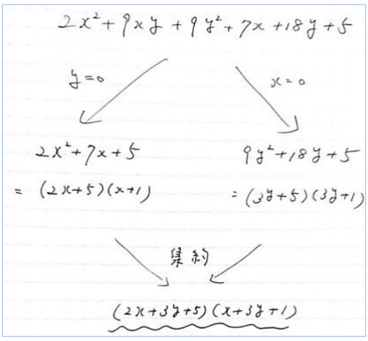
雑感　2 次 6 項式の因数分解

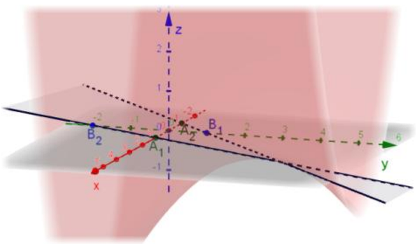
■　何を今更の感もあるが，2 次 6 項式の因数分解を取り上げる．
いわゆる たすき掛けの応用問題として，教科書には必ず取り上げられる．
手元の教科書の例題としては，$2x^2+5xy+3y^2+2x+y-4$ が登場している．
指導すると，試行錯誤で手こずる生徒が割と出る内容である．
例えば次のような問題では，係数の組合せが多数あるので難易度が高い．
$6x^2-17xy+12y^2-6x+6y-36=6x^2-(17y+6)x+6(y+2)(2y-3)$

■　さて，過日，例の質問箱に右図のような手法が載った. 初めて見る仰天の手法であり, この手法について「賛否両論ある」という．
もちろん,「否」である．
これに次のように回答した．



この方法だと，xy の係数が何であってもすべて同じ式に因数分解されることになってしまいます．例えば 2x²+9xy+9y²+7x+18y+5 でなくても 2x²+xy+9y²+7x+18y+5 でも 2x²-9xy+9y²+7x+18y+5 でも，もしそれらが 2 つの 1 次式の積に因数分解ができる式であればすべて (2x+3y+5)(x+3y+1) になってしまいます（それは変でしょう）．
上に挙げた 2 つの例は，有理数係数では 2 つの 1 次式の積に因数分解はできませんが， 2x²+(81/5)xy+9y²+7x+18y+5 は（係数に分数があるものの）因数分解できて (2x+15y+5)(5x+3y+5)/5 になります．この式をその方法で「因数分解」すると (2x+3y+5)(x+3y+1) という間違った答えになってしまいます．
さらに，その方法の別の問題点を指摘すると 2x²-3xy+y²+y-2 を その方法で「因数分解」すると 2(x+1)(x-1), (y-1)(y+2) から 2(x+1)(x-1) の「2」をどちらの因数に掛けるかで (x+1)(2x-2) と (2x+2)(x-1) の 2 つのケースが考えられます．(y-1)(y+2) の係数から (2x+2)(x-1) を採用して (2x+y+2)(x+y-1) と考えると，これは 2x²+3xy+y²+y-2 なので間違いです． 正しくは (x+1)(2x-2) と (-y+1)(-y-2) を用いた (2x-y-2)(x-y+1) になります．これだと複数の方法を試して展開してみて, 元の式と同じになるものを採用するというずいぶん回りくどい方法になります．

■　この最後の例の因数分解可能な2次6項式で上の手法の仕組みを図解すると，次のようになる．
$z=2x^2-3xy+y^2+y-2$ は図のピンクの曲面（双曲放物面）であり，平面 $z=0$ と 2 直線（黒）で交わっていて，xy 平面上のその 2 直線の方程式(=0 とした左辺)の積=0 が，求める因数分解の式=0 と同値になっている．



この曲面と x 軸($y=0 \land z=0$)との交点を $A_1(1,0,0)$,$A_2(-1,0,0)$，y 軸($x=0 \land z=0$)との交点を $B_1(0,1,0)$,$B_2(0,-2,0)$とする．
この場合では，黒い直線は直線 A_1B_2, A_2B_1 であるが，この 2 点ずつの組み合わせを変えて直線 A_1B_1, A_2B_2 とすると正しい黒い直線にはならない(これは，曲面 $z=2x^2+3xy+y^2+y-2$ との交線になる)．

■　私は最近，この 2 次 6 項式の因数分解は次のようにすることが多い．
$6x^2-17xy+12y^2-6x+6y-36$ で示せば次の通り．
与式＝ $2x-3y\quad 3x-4y\quad -6x+6y-36$
$=(2x-3y-6)(3x-4y+6)$

$$\begin{array}{lrcr} 2x-3y & -6 & \to & -18x+24y \\ & \times & & \\ 3x-4y & 6 & \to & 12x-18y \\ \hline & & & -6x+\ 6y \end{array}$$

どちらが簡単ということもないのだが, x が残っているので, 見やすいような気がする．

■　過日，ある 2 次 6 項式の因数分解の質問について，上の間違った方法での「回答」が示されていた．この間違い手法が広がっているのだろうか．

2025 年 05 月 01 日