雑感　円のあるパラメータ表示

■ 次のようなパラメータ表示関数に遭遇した．例の質問箱である．

$$x=\frac{4\cos t-2}{5-4\cos t},\quad y=\frac{4\sin t}{5-4\cos t}\quad (0\leqq t\leqq \pi)$$

が描く図形は何かを問う問題であり，この問題の解答は1頁を超える分量があり，手強そうだ．
それに恐れをなしたか，質問者は「微分法で何とかならないか」と尋ねている．

■ 解答は，$\sin t=\dfrac{3y}{4(x+1)}$，$\cos t=\dfrac{5x+2}{4(x+1)}$ と解いて，

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ から $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{16}{9}$ を導き，

$0\leqq \sin t\leqq 1$，$-1\leqq \cos t\leqq 1$ からx, y の範囲を吟味して（詳細は省く），この円の $y\geqq 0$ 部分(半円) が求める図形としている．
（t の範囲が$0\leqq t\leqq 2\pi$ であれば，円全体になる）

■ 試みに，微分法を用いてみると，

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{12\sin t}{(5-4\cos t)^2}\leqq 0,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{4(5\cos t-4)}{(5-4\cos t)^2}$$

から，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ $(0<\alpha<\pi)$ とすれば $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ であり，増減表は右のようになる．
しかし，これからだと，3点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ 0\right)$, $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$, $(2,\ 0)$ を通る曲線だとは分かっても，それが円弧であることまでは分らない．

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
x	2	$\searrow$	$\dfrac{2}{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{2}{3}$
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{3}$	$\searrow$	0

■ それにしても，円のパラメータ表示としては奇妙な関数式であり，どのような方法で作成したのかが気になる．
いろいろ考察した結果，y の式にヒントがあると気づいた．

楕円の極方程式に，$r=\dfrac{k}{1-e\cos\theta}$ $(0<e<1)$ がある．

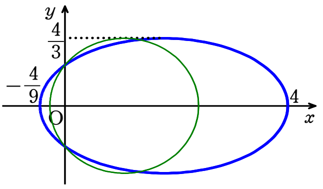
この$e=\dfrac{4}{5}$ のケースで

$r=\dfrac{4}{5-4\cos\theta}$ を考えたとき，

このパラメータ表示は

$x=\dfrac{4\cos\theta}{5-4\cos\theta}$，$y=\dfrac{4\sin\theta}{5-4\cos\theta}$

であり，右のような楕円(青)である．



この楕円の長軸半径は$\dfrac{20}{9}$，短軸半径は$\dfrac{4}{3}$ であるので，この楕円をx 軸方向へ$\dfrac{3}{5}$倍すれば半径が$\dfrac{4}{3}$の円(緑)になる．

この問題では，このようにして得られた円をx 軸方向へ$-\dfrac{2}{5}$だけ平行移動して $x=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4\cos t}{5-4\cos t}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{4\cos t-2}{5-4\cos t}$ を作っているように思われる．
（実際には，別のプロセスを経ているのかもしれないが…)

■ なお，平行移動分を調節して，この円をO中心の円とすると方程式は次の通りとなる．

$$x=\frac{4(5\cos t-4)}{3(5-4\cos t)},\quad y=\frac{4\sin t}{5-4\cos t}$$

あまりきれいな式には見えないが，（試験問題以外に）どのような用途があるのだろうか．
最初の方程式が比較的スッキリした式になっているのは，平行移動分をうまく設定しているためであろう．

2025 年 07 月 01 日