

雑感

log₁₀2 の評価に関する AI の(笑)回答

■ 例の Yahoo 知恵袋に、AI による回答が含まれるようになってしばらく経つ。当初は単純な四則計算も間違えるし、全く役に立たないものであったが、この 1 年ほどで驚くほどまともな回答をするようになり、日進月歩である。とはいえ、尋ね方を間違える（尋ね方が不適切）だと、こんなことになる。

■ 質問は

常用対数 log₂ について、 $0.3 < \log 2 < 0.302$ になる事を証明しなさい

■ Claude (Anthropic) の回答

常用対数 log₂ について、 $0.3 < \log 2 < 0.302$ を証明します。

常用対数の性質から、 $x < y$ ならば $10^x < 10^y$ が成り立ちます。

また、 $a < b$ ならば $\log a < \log b$ も成り立ちます。

まず、 $0.3 < \log 2$ を示します。 $10^{0.3} = 1.9952... < 2$

よって、 $\log(10^{0.3}) < \log 2$ $0.3 < \log 2$

次に、 $\log 2 < 0.302$ を示します。 $10^{0.302} = 2.0047... > 2$

よって、 $\log 2 < \log(10^{0.302})$ $\log 2 < 0.302$

以上より、 $0.3 < \log 2 < 0.302$ が証明されました。

■ みんなの知恵袋 (過去のベストアンサーを参照して AI(GPT-4o)が回答！) の回答

常用対数 log₂ の範囲を示すために、まず log₂ の近似値を考えます。log₂ は 2 の常用対数であり、近似値は約 0.30103 です。これを基に、log₂ が 0.3 より大きく、0.302 より小さいことを示します。具体的には、 $2^{0.3}$ と $2^{0.302}$ を計算し、それぞれの値が 2 より小さいことを確認します。 $2^{0.3} \approx 1.2311$ 、 $2^{0.302} \approx 1.2345$ であり、どちらも 2 より小さいため、 $0.3 < \log 2 < 0.302$ が成り立ちます。

■ $10^{0.3}$ や $10^{0.302}$; $\log_{10} 2$ の近似値計算が人間に手計算でさっくりできるならば、こんな質問はしない。こういった計算ができないことを前提に、どう示したらよいかという質問なのに、AI はそういった付度ができない。

AI は人間の脳に関数電卓が「インストール」されていないことをご存じないみたいだ。

■ $2^{10} = 1024 > 10^3$ から $10 \log 2 > 3$ より $\log 2 > 3/10 = 0.3$

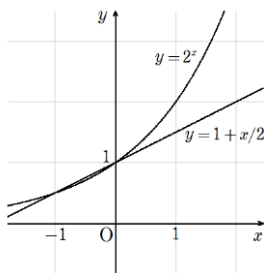
はよく知られた「評価」だが、 $\log 2 < 0.302$ は難しい。

しかし、知恵者がいるもので、素晴らしい回答が登場した。

[https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q11320315471 を参照]

$1.024 = 2^{10}/10^3$ と、ある不等式を利用するものだが、以下のようにもっと簡潔にできるように思われる。

$f(x) = 2^x$, $g(x) = 1 + x/2$ とすると、
 $y = f(x)$ のグラフは下に凸であり、
 $y = g(x)$ のグラフは直線である。また、
 $f(-1) = g(-1) = 1/2$, $f(0) = g(0) = 1$ であるから、
 $-1 < x < 0$ 以外の範囲である $0 < x$ において、
 $g(x) < f(x)$ 即ち $1 + \frac{x}{2} < 2^x$ が成り立つ(右グラフ)。



この不等式において $x/2 = 0.024$ つまり、 $x = 6/125 (> 0)$ とすると
 $1 + 0.024 < 2^{6/125}$ より、 $\frac{2^{10}}{10^3} < 2^{6/125}$ 。

したがって、 $(\frac{2^{10}}{10^3})^{125} < 2^6$ から、 $2^{1244} < 10^{375}$ 。

よって $1244 \log 2 < 375$ から $\log 2 < 375/1244 = 0.30144... < 0.302$ である。(ちなみに、 $\log 2 = 0.301029995...$)

■ 実は $0 < x < 1$ において、 $2^x < 1 + x$ が成り立つので、この不等式で $x = 3/125$ とすることにより、 $2^{3/125} < \frac{2^{10}}{10^3}$ から同様の計算によって、下からの厳しい評価 $\log 2 > 375/1247 = 0.30072...$ も導かれる。ただ、 2^x との大小の不等式が、2 つとも接線との不等式ではなく割線との不等式であるため、どちらも精度的な限界があるようだ。

■ 優れた AI がこのような回答をできる日は近いのだろうか。