

# 雑感 $\log_{10}2$ の評価に関する AI の(笑)回答

■ 例の Yahoo 知恵袋に、AI による回答が含まれるようになってしばらく経つ。当初は単純な四則計算も間違えるし、全く役に立たないものであったが、この 1 年ほどで驚くほどまともな回答をするようになり、日進月歩である。とはいって、尋ね方を間違える（尋ね方が不適切）だと、こんなことになる。

■ 質問は

常用対数  $\log_2$  について、 $0.3 < \log_2 < 0.302$  になる事を証明しなさい

■ Claude (Anthropic) の回答

常用対数  $\log_2$  について、 $0.3 < \log_2 < 0.302$  を証明します。

常用対数の性質から、 $x < y$  ならば  $10^x < 10^y$  が成り立ちます。

また、 $a < b$  ならば  $\log_a < \log_b$  も成り立ちます。

まず、 $0.3 < \log_2$  を示します。 $10^{0.3} = 1.9952\dots < 2$

よって、 $\log(10^{0.3}) < \log_2 0.3 < \log_2$

次に、 $\log_2 < 0.302$  を示します。 $10^{0.302} = 2.0047\dots > 2$

よって、 $\log_2 < \log(10^{0.302})$   $\log_2 < 0.302$

以上より、 $0.3 < \log_2 < 0.302$  が証明されました。

■ みんなの知恵袋 (過去のベストアンサーを参照して AI(GPT-4o)が回答!) の回答

常用対数  $\log_2$  の範囲を示すために、まず  $\log_2$  の近似値を考えます。 $\log_2$  は 2 の常用対数であり、近似値は約 0.30103 です。これを基に、 $\log_2$  が 0.3 より大きく、0.302 より小さいことを示します。具体的には、 $2^{0.3}$  と  $2^{0.302}$  を計算し、それぞれの値が 2 より小さいことを確認します。 $2^{0.3} \approx 1.2311$ 、 $2^{0.302} \approx 1.2345$  であり、どちらも 2 より小さいため、 $0.3 < \log_2 < 0.302$  が成り立ちます。

■  $10^{0.3}$  や  $10^{0.302}$  ;  $\log_{10}2$  の近似値計算が人間に手計算でさっくりできるならば、こんな質問はしない。こういった計算ができないことを前提に、どう示したらよいかという質問なのに、AI はそういった忖度ができない。

AI は人間の脳に関数電卓が「インストール」されていないことをご存じないみたいだ。

■  $2^{10} = 1024 > 10^3$  から  $10 \log_2 > 3$  より  $\log_2 > 3/10 = 0.3$

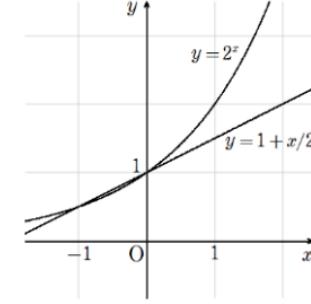
はよく知られた「評価」だが、 $\log_2 < 0.302$  は難しい。

しかし、知恵者がいるもので、素晴らしい回答が登場した。

[[https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question\\_detail/q11320315471](https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q11320315471) を参照]

**1.024 =  $2^{10}/10^3$**  とある不等式を利用するものだが、以下のようにもっと簡潔にできるように思われる。

$f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = 1 + x/2$  とすると、  
 $y=f(x)$  のグラフは下に凸であり、  
 $y=g(x)$  のグラフは直線である。また、  
 $f(-1)=g(-1)=1/2$ ,  $f(0)=g(0)=1$  であるから、 $-1 < x < 0$  以外の範囲である  $0 < x$  において、 $g(x) < f(x)$  即ち  $1 + \frac{x}{2} < 2^x$  が成り立つ(右グラフ)。



この不等式において  $x/2=0.024$  つまり、 $x=6/125(>0)$  とすると  $1 + 0.024 < 2^{6/125}$  より、 $\frac{2^{10}}{10^3} < 2^{6/125}$ .

したがって、 $(\frac{2^{10}}{10^3})^{125} < 2^6$  から、 $2^{1244} < 10^{375}$ .

よって  $1244 \log_2 < 375$  から  $\log_2 < 375/1244 = 0.30144\dots < 0.302$  である。(ちなみに、 $\log_2 = 0.301029995\dots$ )

■ 実は  $0 < x < 1$  において、 $2^x < 1 + x$  が成り立つので、この不等式で  $x=3/125$  とすることにより、 $2^{3/125} < \frac{2^{10}}{10^3}$  から同様の計算によって、下からの厳しい評価  $\log_2 > 375/1247 = 0.30072\dots$  も導かれる。ただし、 $2^x$  との大小の不等式が、2 つとも接線との不等式ではなく割線との不等式であるため、どちらも精度的な限界があるようだ。

■ 優れた AI がこのような回答ができる日は近いのだろうか。