雑感　入試問題を図解する

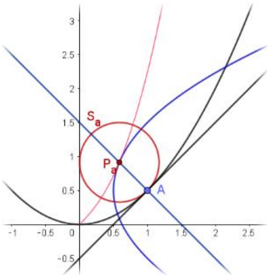
■　内容が今一つ分からないとき，適切な 1 つの図でパッと理解できることはよくある．図は偉大であるが，その描写は楽でないことも多い．

■　今年 2024 年の東工大の問題．

> xy 平面上の曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$ で接する円のうち，y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく．a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C，とくに S_1 の中心を P とする．
> (1)　点 P の座標を求めよ．　　(2)　点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

フリーハンドでそれなりの図を描くことはできるが，きちんとした図を描くにはどうすれば良いか．

A $\left(a,\dfrac{1}{2}a^2\right)$ に対して， S_a の中心 P_a は，A におけるこの放物線の法線上に存在することは分かるが，y 軸にも接するように円を設定する必要がある．このP_a は A からと y 軸とから等距離にあるので，A を焦点，y 軸を準線とする放物線(青)上に存在し，それらの交点として作図できる．



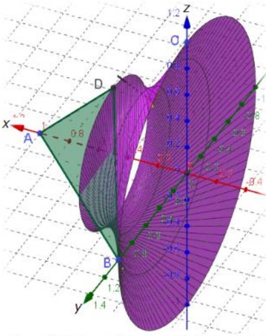
GeoGebra では，焦点と準線指定で放物線を簡単に描くことが出来る．

このことを用いれば，直線$y=\frac{3}{2}-x$ と放物線 $y-\frac{1}{2}\ {}^2=2\ x-\frac{1}{2}$ の交点として，(1)のP_1 の座標を求めることが出来る．図から，P_a において C（赤い細線）と青い放物線が接していると推測でき，設問に加えることもできそうだ(実は C は青い放物線の包絡線の一部)．

■　今年 2024 年の東大の問題．

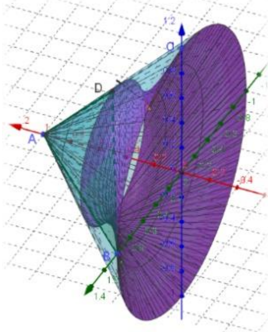
> 座標空間内に 3 点 A (1, 0, 0)，B (0, 1, 0)，C (0, 0, 1) をとり，D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

△ABD の辺 AB，AD は A が x 軸上にあり，線分 AB を x 軸周りに回転させた曲面（円錐面）がこの立体の外側の輪郭を作る．辺 BD は x 軸とねじれの位置にあり，辺 BD を x 軸周りに回転させた曲面がこの立体の内側の輪郭を作ることが分かる．その内側の曲面を図示すれば，右のような回転双曲面になる．こういった出題は珍しくはなく，東大としては標準的な出題である．

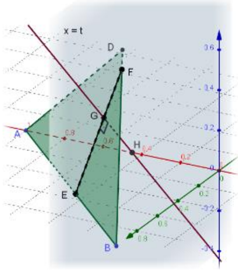


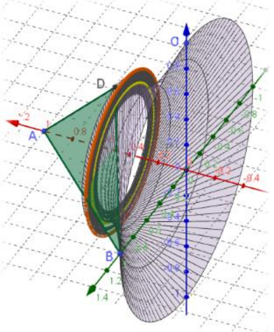
この図は GeoGebra の立体図形の「回転面」ツールで辺 BD を回転させて，瞬時に描くことが出来る．

△ABD を回転させて全体を描けば，右のようになる（実際は，線分 AB を x 軸周りに回転させた薄青色の曲面と合成してある）．



体積計算では，この立体を平面 $x=t$ で切断したドーナツ型の断面を考えるのが一般的である．この平面と△ABD が辺 AB，BD と交わるケースで，辺 AB との交点 E,辺 BD との交点 F とドーナツの中心 H$(t,0,0)$に対して，内側の輪郭を構成する円の半径が常に線分 FH であると誤解する生徒が多い(左下図の場合では正しくは線分 HG が半径）．





実際，$t=0.45$ のときの右図で，断面のグレーのドーナツ型において，オレンジ色が E の軌跡，黄色が F の軌跡で，黄色が内側の輪郭ではないことが分かる．