

雑感

数式処理ソフトに 漸化式を解かせるみる

■ 夏休みの補習で、漸化式を扱った。漸化式はそのタイプ別に処理の方法が異なるし、置き換えによってある基本のタイプに帰着させることが多い。

練習問題などを作ったとき、求めた答えが正しいか不安な場合、もとの漸化式に代入して成り立てば良しとする。

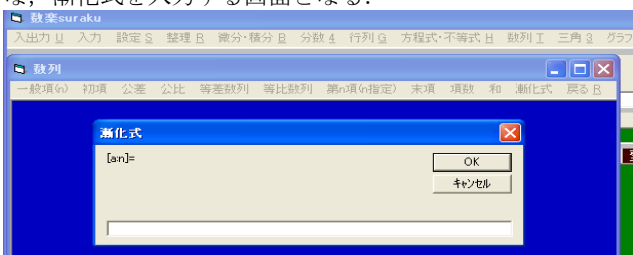
でも、数式処理ソフトが「答」を出してくれれば、有り難い。

■ そこで、10ほどのタイプの漸化式を実際に解かせてみた。用いた数式処理ソフトは、フリーウェアの **maxima** と、表記に難点があるものの、優れたソフト「数楽」(<http://www.sraku.net/>)である。

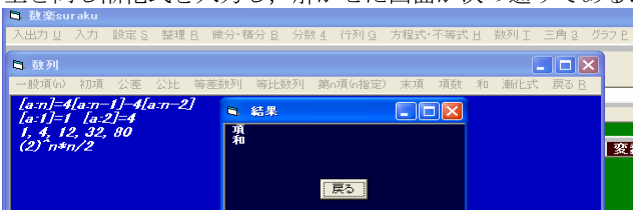
■ **maxima** では、`solve_rec` というパッケージを読み込んで、解く。例えば、 $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_1 = 1, a_2 = 4$ は、次のようにすればよい。

```
(%i10) f5: f(n)=4*f(n-1)-4*f(n-2);
(%o10) f(n)=4 f(n-1)-4 f(n-2)
(%i11) solve_rec(f5, f(n), f(1)=1, f(2)=4);
(%o11) f(n)=n 2^{n-1}
```

■ 「数楽」では上のバーの「数列 **I**」をクリックすると、数列専門画面に切り替わり、「漸化式」をクリックすると、下のような、漸化式を入力する画面となる。



上と同じ漸化式を入力し、解かせた画面が次の通りである。



■ さて、さまざまな漸化式を解かせた結果はというと、階差型、線形隣接2項間、線形隣接3項間などは、双方とも○であった。線形でなくとも、隣接2項間ならば $a_{n+1} = 2a_n + n - 1$ や $a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 2n - 1$ など双方とも○であった。

分数式型も、 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$, $a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}$ などは双方○。

違いがあったもの、双方とも解けなかったものは、下表。

漸 化 式	maxima	数楽
$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2n + 4$ (第2階差型)	○	×
$a_{n+1} = \frac{2a_n}{na_n + 1}$	△	×
$a_{n+1} = \frac{a_n}{2^{n-1}a_n + 1}$	×	×
$a_n = n^2 a_{n-1}$	×	×

△は、答の表記が右のように、(もっと簡単にできるのに)無駄に複雑な形になったものである。

```
(%i29) solve_rec(f13, f(n), f(1)=1);
              (n-1) 2^{n-1} + 1
(%o29) f(n) = -----
              n! + n!
              (n-2) 2^{n-2} + 1
              (n-1)! + (n-1)!
```