# 雑感　全微分と対数微分法

■　対数微分法という微分の方法がある．複雑な有理関数や無理関数の微分を，この方法で微分する内容が，数学Ⅲの教科書に登場する．しかし，頑張って計算すれば，これらの関数は別に対数微分法を使わずとも微分はできる．

■　しかし，$x^x$，$(\sin x)^{\cos x}$ などのように，$\{f(x)\}^{g(x)}$ のタイプの関数が，問題集や参考書に登場する．「これらの関数は対数微分法を使わないと微分の計算はできない」と思い，生徒にもそう指導してきた．

$y=x^x$ $(x>0)$ について，対数微分法で微分を行えば

$\log y = x\log x$　の両辺を $x$ で微分して

$$\frac{y'}{y}=\log x + x\left(\frac{1}{x}\right)=1+\log x\ .$$

よって，$y'=x^x(1+\log x)=x^x+x^x\log x$ となる．

■　でも，全微分の考え方を使えば，対数微分法を使わなくても微分ができるということを，数年前に同僚から教わった．
本当に，不明を恥じることが多い．

■　全微分の公式は，次の通りである．

$$\boxed{dy=\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2}$$

これを用いて $y=x^x$ の微分を行うには，分かり易くは

$y={x_1}^{x_2}$ とおくと，$y$ は $x_1$ の「整関数」と見ることも，底を $x_1$ とする「指数関数」とみることもできて，

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=x_2{x_1}^{x_2-1},\quad \frac{\partial y}{\partial x_2}={x_1}^{x_2}\log x_1 \text{ である．}$$

全微分の公式により $dy={x_2}^{x_2-1}dx_1+{x_1}^{x_2}\log x_1 dx_2$ となる．

ここで $x_1=x_2=x$ と，元に戻せば

$$dy=xx^{x-1}dx+x^x\log x dx \quad \text{より} \quad \frac{dy}{dx}=x^x+x^x\log x$$

となる．

■　慣れてしまえば，$y=x^x\,(x>0)$ について
「整関数」とみて微分した結果 $xx^{x-1}$ と，「指数関数」とみて微分した結果 $x^x\log x$ の和になり，
$y'=xx^{x-1}+x^x\log x=x^x+x^x\log x$ である．

■　もう 1 つ例を挙げれば，$y=(\sin x)^{\cos x}$　$(0<x<\pi)$ では
「整関数」とみて微分すると
$\cos x(\sin x)^{\cos x-1}(\sin x)'=\cos^2 x(\sin x)^{\cos x-1}$，
「指数関数」とみて微分すると
$(\sin x)^{\cos x}(\cos x)'\log(\sin x)=-(\sin x)^{\cos x+1}\log(\sin x)$ で，
これらの和から，
$y'=\cos^2 x(\sin x)^{\cos x-1}-(\sin x)^{\cos x+1}\log(\sin x)$
となる．
合成関数の微分を丁寧にやらないと，間違えてしまいそうだが….

■　この計算を「公式化」すれば，次のようになる．

$$\begin{aligned}\left(\{f(x)\}^{g(x)}\right)'&=g(x)\{f(x)\}^{g(x)-1}\cdot f'(x)+\{f(x)\}^{g(x)}\log f(x)\cdot g'(x)\\&=\{f(x)\}^{g(x)-1}\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\log f(x)\}\end{aligned}$$

とはいえ，こういったことを生徒に教えるわけではない．

2011 年 12 月 11 日