

雑感 役に立った研究

■ 例によって、質問箱から。

円の弧長と矢高が分かっているときに、その円の半径を求める方法を教えていただけますと幸いです。弧長は円周の半分より小さい場合のみで結構です。おそらくニュートン法でテイラー展開をして近似するのだらうというところまでは分かったのですが、行き詰ってしまいました。できれば導出の過程も知りたいです。よろしく願いいたします。

■ これに、即答する。

弧長 $2L$ 、矢高 h 、中心角 2θ とすると、 $(1-\cos\theta)/\theta=h/L$ が成り立ちます。簡単のために $h/L=k$ とおくと $(1-\cos\theta)/\theta=k$...①

マクローリン展開によって $\theta/2-\theta^3/24\approx k$ なので、この3次方程式を解くと $\theta\approx 4\sin(\arcsin(3k/2)/3)$...② がビエタの解として求まります。

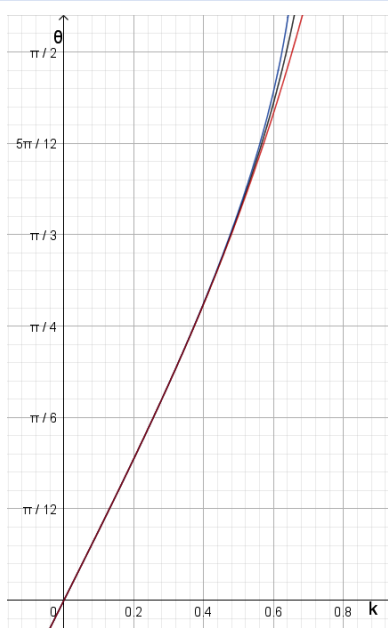
これを用いても良いのですが、関数が複雑なので、これをさらにマクローリン展開することによって、 $\theta\approx 2k(k^4+k^2+3)/3$...③ が成り立ち、実用的です。

$0<\theta<\pi/4$ では、結構良い近似であることが、次のグラフから分かります。①黒、②青、③赤 [横軸:k, 縦軸: θ]

これを用いて $r=L/\theta$ から、 r の近似値を求めることができます。

なお、データを入力すると計算してくれるサイトとして、次がありますが、ニュートン・ラフソン法によるそうです。

<https://keisan.casio.jp/exec/user/1329041462>



■ なぜ、「即答」できたかと言うと、ちょうど1年前にこの内容を含めた研究レポートをまとめ、雑誌『初等数学 第89号』(2020/09刊)に投稿し、「扇形の中心角で使える近似式」として掲載されたからである。

■ 図のような扇形 OAB を考える。

AB の弧長 $2L$ 、弦長 $2s$ 、半径 R 、中心角 2θ 、矢高 $MH=h$ である。この5つの要素について、そのうちの2つの値が分かれば、残りの3つの要素の値が確定する。

その10のケースの計算にあって、2つのケースの計算が困難を極める。

1つは、 L と s が分かっている場合である。このとき $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{s}{L}$ が成り立つことが容易に分かるが、この式の右辺が既知のとき θ を求めることは容易ではない。この場合、 $\theta \approx \sqrt{10 - \sqrt{20(\frac{6s}{L} - 1)}}$ が精度の良い近似式であることを示した。

もう1つが L と h が分かっている場合で、まさに今回の質問のケースに該当する。その研究成果の要点を、上のように回答としてまとめたのである。

■ す、すごい...実用的な近似式まで教えていただきありがとうございます！本当に助かりました

とのコメントを頂戴。ということは、役に立ったということなのだろう。どこかで、有効利用してもらえたら嬉しい。