雑感　Yahoo 知恵袋と積分

■　Yahoo 知恵袋に多い質問の 1 つが積分である．
　初歩的な教科書の問や問題集の基本問題の丸投げも一定数あるが，積分計算は多くの場合，易しくないのであろう．

■　ときどきある質問の 1 つに，不定積分で自分が求めた答と正解が違うというものがある．仔細に見れば積分定数の違いだけで，正解であるというケースが殆どなのだが，式の形が違うと間違っていると思いがちだ．ある質問では，3 通りの答を書いたノートがあったが，いずれも正しい式であった．授業において，（生徒が聞いていないだけかも知れないが）こういった指導が充分行き届いていないことは事実だろう．三角関数では難しいことがあるけれども…．

■　また，置換積分や部分積分などの方針が立たないケースである．
　常々思うことだが，積分は職人芸的なところがあるので（微分の機械的な計算と比べて）基本的手法を押さえ，さらには試行錯誤も含めてある程度練習を積まないと積分はできるようにならない．

■　一番厄介なのは，初等関数表示できない積分に関する質問である．例えば，次のような質問である．

e^y^2 を積分してください

　見やすく書き直せば，$\int e^{y^2}dy$　である．
　見ただけで，これは初等関数表示は無理だなと思うが，念のため WolframAlpha で確認すると，次のようになり無理である．

Indefinite integral:

$$\int e^{y^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ \mathrm{erfi}(y) + \text{constant}$$

Open code

erfi(x) is the imaginary error function

■　この質問に対して

この関数の不定積分は、初等関数では表せないことが分かっています。
初等関数とは、整関数、分数関数、無理関数、三角関数、指数関数、逆三角関数や、それらの合成関数を作ることを有限回繰り返して得られる関数のことです。
簡単に言えば、和・積・商や√ 、sin、cos などなどを使った式で表されている関数のことで、高校までの教科書などに載っている関数の殆どが初等関数です。
見かけが簡単そうに見えても、不定積分を初等関数で表示できないような関数が少なからずあります。例えば、e^x/x とかもそうです。

と回答するが，質問者からの反応はない．

■　その無反応の理由は様々だろうが，これでは「事実」を知っただけであって，理由が分からずに納得できないからであろう．

■　その理由を尋ねる質問もある．

∫(0→x)e^(-t^2) dt　（インテグラル、積分する区間が 0 から x まで、e の-t^2 乗、e のマイナス t の 2 乗乗）　が原始関数を求められないらしいのですがどうして求められないんでしょうか？

■　$\int_0^x e^{-t^2}dt$ である．これにも以下のような回答をしたが，なかなか反応がない．難しすぎて反応しようがないのかも知れない．

■　微分ガロア理論というのが関係していて，次の Liouville の判定法というのがあるそうです．
有理関数 f(x), g(x) に対して，関数 f(x)e^g(x) の不定積分が初等関数で書けるためには,ある有理関数 h(x) が存在して,f(x)=h'(x)+h(x)g'(x)と書けることが必要かつ十分である．
このことを用いるならば，f(x)=1, g(x)=-x^2 として，1=h'(x)-2xh(x)
を満たす有理関数がないことを示せば良いことになります．
http://tetobourbaki.hatenablog.com/entry/2017/01/08/182822
に，e^(x^2) に関しての証明がありますから，同様にして示すことができるのではないでしょうか（私は示していませんが…）．

■　後刻，次のような返答があった．正直な感想である．

ありがとうございます。
何か思っていたよりも凄く難しい答えが返ってきてきました…

■　積分は奥が深い．

2018 年 06 月 01 日