# 雑感　Yahoo 知恵袋の興味深い問題(1)

■　すでに削除されてしまった質問なので，正確な質問文は再現できないものの，おおよそ次のようだったと思う．

y=x(1-x)+xlog(x)+(1-x)log(1-x)の極小値を求めよ．

これに対してすぐ次のような回答があって，

微分すればよい．

これに，質問者が，

微分してもできない．

と返信があり，続いて回答者が，次のように返信した．

y'=log(x/(1-x))-2x+1=0　あっ，本当だ．

■　興味を持ってしばらく考えた後，次のように返信した．

f(x)=x(1-x)+xlog(x)+(1-x)log(1-x)　と置きます．定義域は

x>0,かつ 1-x>0 から 0<x<1…①　となります．

①に属する 2 つの値 1/2+t,1/2-t に対して，f(1/2+t) と f(1/2-t) の値が等しくなります．これは，f(x)の式の形から分かることですが，必要なら計算して確認してください．よって，y=f(x) のグラフは，直線 x=1/2 に関して対称です．

f'(x)=-log(1-x)+log(x)-2x+1 で，

f'(1/2)=-log(1/2)+log(1/2)=0 となり ，

f''(x)=(2x^2-2x+1)/(x(1-x)) から f''(1/2)=2>0 であるので，

f(x)は x=1/2 で極小となり，極小値は　f(1/2)=-1/4-log(2) となります．

※ f'(x)=0 という方程式を解くことは困難ですが，

式の形から対称性に気づくことがポイントです．

■　すぐに不備に気づいて，次のような内容の補足を書いた．

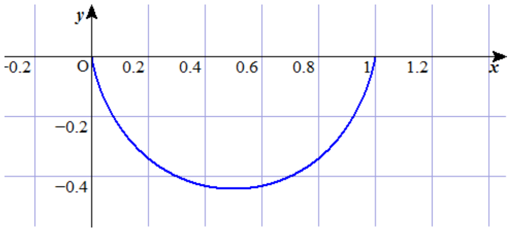
①における $f'(x)$ の単調性が $f''(x)>0$ から分かり，

$\lim_{x\to+0} f'(x)=-\infty$，　$\lim_{x\to 1-0} f'(x)=\infty$ から，$f'(x)=0$　の①における実数解はただ 1 個であり，上記のことから，極小値はただ 1 つである．

■　「$y=f(x)$ のグラフが，直線 $x=1/2$　に関して対称」に気づかないと解けそうもない問題だった．私の回答はベストアンサーとされたが，質問そのものが間を置かずなぜか削除された．

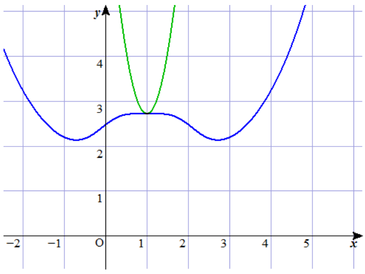
$f\left(\frac{1}{2}+t\right)=f\left(\frac{1}{2}-t\right)$ を示せと言ったヒントをつければ，充分試験問題となりうる興味深い内容である．

ちなみに，$f(x)$ のグラフは，次のようである．




■　この関数の式を参考にすれば，例えば実数全体で定義される関数 $g(x), h(x)$ があって，$f_1(x)=g(x)h(x)+g(2-x)h(2-x)$ や $f_2(x)=g(x)h(2-x)+g(2-x)h(x)$ といった関数を定義すれば，いずれも直線 $x=1$　に関して対称だから，$x=1$　で極値を持つはずである．

実際，例えば $g(x)=e^x$，$h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$　とすると，それらのグラフは次のようになる．青が $f_1(x)$，緑が $f_2(x)$ のグラフである．




2018 年 04 月 15 日