

雑感 この問題を客観問題で出題する感覚

■ 2017年の早稲田大学教育学部の問題.

定数 c は $-1 < c < 1$ を満たすとする. すべての実数 x に対して, 関係式 $f(x) + f(cx) = x^2$ を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ.

易しくない. 安田亨氏も難問であると『大学への数学 2018年1月号』に書いている. その中で, 「勝手に『 $f(x)$ は多項式』という条件をくっつけて読んで, 与式の両辺の次数を考え, $f(x)$ の次数は2で $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ とおいて係数をくらべるという方法はいけません. 多項式に限るかどうかはわかりません。」と述べている.

■ この問題は, $f(x) + f(cx) = x^2$ を漸化式のように用いて, 次のように考えるのが一般的であるようだ.

$$\begin{aligned} f(x) + f(cx) = x^2 - f(cx) &= x^2 - \{(cx)^2 - f(c^2x)\} = x^2(1-c^2) + f(c^2x) \\ &= x^2(1-c^2) + \{(c^2x)^2 - f(c^3x)\} = x^2(1-c^2+c^4) - f(c^3x) = \dots \end{aligned}$$

これをスッキリさせ, きちんと解くと次のようになる.

$$f(x) + f(cx) = x^2 \text{ において, } x=0 \text{ とすると, } f(0) = 0.$$

$$f(x) + f(cx) = x^2, \quad -f(cx) - f(c^2x) = -c^2x^2,$$

$$f(c^2x) + f(c^3x) = c^4x^2, \quad -f(c^3x) - f(c^4x) = -c^6x^2,$$

.....

$$f(c^{n-1}x) + f(c^n x) = c^{2(n-1)}x^2, \quad -f(c^n x) - f(c^{n+1}x) = -c^{2n}x^2.$$

これらの両辺を加えて, (ただし, $n \geq 0$)

$$f(x) - f(c^{n+1}x) = x^2(1-c^2+c^4-c^6+\dots+c^{2(n-1)}-c^{2n}) = \frac{1-(-c^2)^{n+1}}{1+c^2}x^2.$$

ここで, $n \rightarrow \infty$ とすると, $-1 < c < 1$ から $c^{n+1} \rightarrow 0$, $(-c^2)^{n+1} \rightarrow 0$ であり, $f(x)$ が連続であることにより $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c^{n+1}x) = f(0)$ であるから,

$$f(x) - f(0) = \frac{x^2}{1+c^2} \text{ となる. よって, } f(0) = 0 \text{ より } f(x) = \frac{x^2}{1+c^2}.$$

■ この問題だが, <http://www.shinko-keirin.co.jp/keirinkan/kosu/entrance/pdf/81.pdf> において, 筆者大竹氏が安田氏と同じ注意をしているが, どうか的外れな印象を受ける. 生徒のノートで指摘すべき問題点は

(1) $f(x)$ は多項式とは限らない (これは指摘されている).

(2) 仮に $f(x)$ が多項式で2次式であると分かったとしても, $f(x)$ を $ax^2 + bx + c$ のように, 問題文中にある c を定数項に使用して表してはならない. さらに, $a=1, b=0, c=0$ から $f(x) = x$ とならない. ということであろう.

さらに, 「連続関数だから極限を用いる」という着眼点はよいとしても, 掲載の解答に連続関数の性質が用いられていない (略解だとしても, 重要な部分なので欠かせないはず).

■ これを $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ として係数比較で解けば

$f(x) + f(cx) = A(1+c^2)x^2 + B(1+c)x + 2C$ であり, これが x^2 に恒等的に等しいから, $A(1+c^2) = 1, B(1+c) = 2C = 0$. $-1 < c < 1$ より $A = \frac{1}{1+c^2}, B = C = 0$ から $f(x) = \frac{1}{1+c^2}x^2$ を得る. これは「正解」に同じである. 解き方は間違いだが, 正解と同じ関数式が得られる.

■ さて, ここで私が問題にしたいのは, **この問題が「客観問題」として, 出題された** ということである (①の小問集合の(4)であり, 答のみを解答欄に記入する). 途中の記述は必要なく, 答だけで O.K. の問題だったのである.

したがって, $f(x)$ は「2次関数ではないかな?」と予想し, $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ と置く誤った方法で「正解」を導き出した受験生も正解として扱われたということである (記述式では当然×).

受験生がこの問題を「正しい方法で解くだろう. $f(x)$ を2次式で置くなどと言う (「連続」という条件を無視した) バカな方法で解くはずはない」と出題者が思っていたとしたら, 受験生の実態を全く知らないオメデタイ出題者であり, その感覚を疑わざるを得ない.

■ 問題には, その問題にふさわしい出題形式があり, それを誤ったら解答者の正しい力を計ることはできない.