雑感　# 「笑わない数学」(最終回)理解のための問題セット

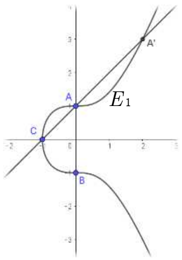
■　NHK テレビ「笑わない数学」第 2 シリーズ最終回「BSD 予想」が 2023 年 12 月 6 日に放送された．現代数学の 7 大難問の 1 つで，100 万ドルの懸賞金がかけられている．キーワードは「有理点」と「楕円曲線」．
難しい部分については番組でも掘り下げることはできないのは当然のこととしても，問題点の所在について<u>高校生でも理解できる興味深い導入</u>が行われている．
ただ, 時間の制約などもあってのことだろうが，ちょっとした疑問がそのままスルーされていって，隔靴掻痒の思いをした高校生もいるのではないか．
番組理解を少し補足する問題セットを作成してみた．

なお，この番組は NHK プラスで 12 月 13 日（水）午後 11：29 まで閲覧可能であり，さらにＥテレで次のような<u>再放送</u>が予定されているようである．
12 月 9 日（土）午後 9:30～午後 10:00； 13 日（水）午前 0:55～午前 1:25.

■　円上の格子点，有理数点について：
【問 1】円 $C_1 : x^2+y^2=2$ 上の格子点 $\mathrm{A}(1,1)$ を通る傾き m の直線がこの円と交わる A 以外の点を A’ とする．m が有理数のとき，A’ は有理数点であることを示せ．

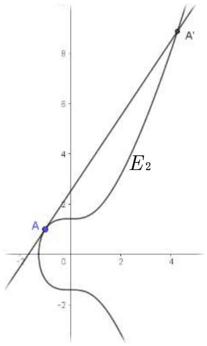
【問 2】円 $C_2 : x^2+y^2=3$ 上には有理数点が存在しないことを示せ. なお, 必要ならば，次の命題を証明したうえで用いても良い.
＜命題＞ A, B を整数とするとき，
　A^2+B^2が 3 の倍数ならば，A, B は共に 3 の倍数である

　※【問 1】は，番組では事実だけが述べられた．【問 2】は番組の中で証明がなされたが，その＜命題＞が証明抜きで使われていた．



■　楕円曲線上の有理数点について：
【問 3】曲線 E_1 : $y^2=x^3+1$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$, $\mathrm{C}(-1,\ 0)$ について，直線 AC がこの曲線と交わる A, C 以外の点 A’の座標を求めよ．

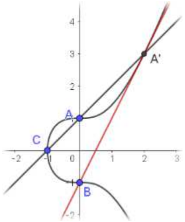
【問 4】曲線 E_2 : $y^2=x^3+2$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$について，A におけるこの曲線の接線がこの曲線と交わる A 以外の点 A’の座標を求めよ．



【問 5】【問 3】の曲線 E_1上の点 A’における接線が曲線 E_1と交わる点について調べよ．

　※【問 3】【問 4】は番組では結果のみが示された．
【問 5】番組では曲線 E_1の有理数点は 5 個のみであると述べられる. 一方, 曲線 E_2については有理数点における接線と曲線との交点が，次々有理数点になっていき，無限個の有理数点が存在すると説明される．
そうであれば，曲線 E_1における A’における接線を考えれば，曲線 E_1においても（5 個に限らず）次々と有理数点が生まれてくるのではないかという疑問に対応する問である．

■　若干のヒント：
【問 1】m の有理式で表されることを示すだけで良い．
【問 2】＜命題＞は，mod 3 で考えるだけ．他は番組通り．
【問 3】3 次方程式を因数定理で解くだけだが，2 つの 1 次因数はすでに分かっている．
【問 4】陰関数の微分で dy/dx を求めれば，接線の傾きが分かる．あとは【問 3】に準ずる．
【問 5】【問 4】に準じて計算すればよいが，A’における接線が点 B を通る（したがって，これから次々と有理数点の交点が生まれてくることがない）．



2023 年 12 月 08 日