雑感　ベクトルと点の位置

■　ベクトルの次のような問題がある．

【1】　平面上の△ABC と点 P に関して，等式
$a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b\overrightarrow{\mathrm{BP}}+c\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ が成り立つとき，点 P の位置を求めよ．

この問題の一般的な解答は次の通りである．
$a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b\overrightarrow{\mathrm{BP}}+c\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$　から　$a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+c(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\cdot\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b+c}$ であるから

辺 BC を $c:b$ に内分する点を D とすれば，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より，点 P の位置は線分 AD を $(b+c):a$ に内分する点である．

■　この解答では頂点 A を基準にして点 P の位置を答えているが, 頂点 B を基準にして, 次のように答えることも可能である．
「点 P の位置は，辺 CA を $a:c$ に内分する点 E に対して，線分 BE を $(c+a):b$ に内分する点である」．

もちろん，頂点 C について答えることもできる．

その意味で, 試験に出題すると採点が面倒である．とはいえ, 上記の問題のように係数とのルールを把握しておけば，何とかなる．

■　さらに空間ベクトルの問題として，次のような問題もある．

【2】　空間内の四面体 ABCD と点 P に関して，等式
$a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b\overrightarrow{\mathrm{BP}}+c\overrightarrow{\mathrm{CP}}+d\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$　が成り立つとき，点 P の位置を求めよ．

手元の問題集の解答の流れは，おおよそ次の通りである．
$a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b\overrightarrow{\mathrm{BP}}+c\overrightarrow{\mathrm{CP}}+d\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$　から
$a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+c(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+d(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})=\vec{0}$．　よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+d\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{a+b+c+d}=\frac{b+c+d}{a+b+c+d}\cdot\frac{(b+c)\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b+c}+d\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{b+c+d}$$

であるから，線分 BC を $c:b$ に内分する点を E，線分 ED を $d:(b+c)$ に内分する点を F とすると，点 P は線分 AF を $(b+c+d):a$ に内分する点である．

■　平面の【1】の場合では, 与えられた 3 頂点以外に 1 点 D が, 空間の【2】の場合では，与えられた 4 頂点以外に 2 点 E，F が，点 P の位置の説明に必要となる．

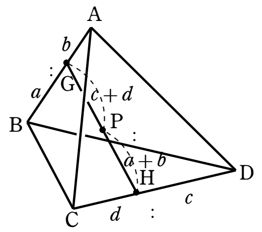
■　【2】において，次のような解答はどうであろうか．

A $(\vec{a})$，B $(\vec{b})$，C $(\vec{c})$，D $(\vec{d})$，P $(\vec{p})$ とすると，
$a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b\overrightarrow{\mathrm{BP}}+c\overrightarrow{\mathrm{CP}}+d\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$　から
$a(\vec{p}-\vec{a})+b(\vec{p}-\vec{b})+c(\vec{p}-\vec{c})+d(\vec{p}-\vec{d})=\vec{0}$ より

$$(a+b+c+d)\vec{p}=a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}+d\vec{d}=(a+b)\frac{a\vec{a}+b\vec{b}}{b+a}+(c+d)\frac{c\vec{c}+d\vec{d}}{c+d}$$

ここで，線分 AB を $b:a$ に，線分 CD を $d:c$ に内分する点をそれぞれ G $(\vec{g})$，H $(\vec{h})$ とすれば　$\vec{p}=\dfrac{(a+b)\vec{g}+(c+d)\vec{h}}{a+b+c+d}$ となるから点 P の位置は, 線分 GH を $(c+d):(a+b)$ に内分する点である．

この解答でももちろん G，H という頂点と異なる 2 点が点 P の位置の説明に必要となるが，<u>この解答の方が位置のイメージがつかみやすいように思われるし，式変形も容易である</u>．



なお,【2】においても，様々な答え方があることは言うまでもない．