雑感　$\tan x$ の肩を持つ

■　三角関数の導関数の公式を導くとき，$(\sin x)'$ を導関数の定義から求め，$(\cos x)'$ の公式を導いた後，$y=\tan x$ については次のようにすることが多い．

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

しかし，$y=\tan x$ も定義から求めてはどうだろうか．

$$(\tan x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\tan x+\tan h}{1-\tan x\tan h}-\tan x\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\tan x+\tan h-\tan x+\tan^2 x\tan h}{1-\tan x\tan h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\tan h}{h}\cdot\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan x\tan h}=1\cdot\frac{1+\tan^2 x}{1-0}=1+\tan^2 x$$

となる．

もちろん，$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるが，$\tan x$ の導関数が $\tan x$ で表示されるという自然さから，そのまま $1+\tan^2 x$ の方がよい．

■　さらに，最近は $\cot x$ という表示が超マイナーになってしまったので $\dfrac{1}{\tan x}$ とするが

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=-\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}=-\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}=-\left(1+\frac{1}{\tan^2 x}\right)$$

も自然な感じである．cot で表示すれば，もっと自然で $(\cot x)'=-(1+\cot^2 x)$ である！

■　そもそも三角関数の中で $\tan x$ は，$\sin x$ や $\cos x$ の親密な兄弟に比べて異端児っぽい印象を拭えない．

$\tan x$ の導関数が $\tan x$ で簡単に表示できて $(\tan x)'=1+\tan^2 x$ なのに，$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ が「公式」になっているのは，$\tan x$ にしてみれば心外ではなかろうか．

実際，積分では $\displaystyle\int\tan^2 x\,dx$ などが出てくると，意表を突かれて「あれ？」と思うことが少なくない．$\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$ として積分することが多いが，

$\displaystyle\int\tan^2 x\,dx=\int\{(1+\tan^2 x)-1\}dx=\tan x-x+C$ とする方がずっと自然な印象だ．

なお，$I_n=\displaystyle\int\tan^n x\,dx$ とすると

$$I_1=\int\tan x\,dx=-\log|\cos x|+C\,,$$

$$I_2=\int\tan^2 x\,dx=\tan x-x+C\,,$$

$$I_3=\int\tan^3 x\,dx=\int\{\tan x(\tan^2 x+1)-\tan x\}dx=\frac{1}{2}\tan^2 x-I_1\,,$$

$$I_4=\int\tan^4 x\,dx=\int\{\tan^2 x(\tan^2 x+1)-\tan^2 x\}dx=\frac{1}{3}\tan^3 x-I_2\,,$$

$$I_5=\int\tan^5 x\,dx=\int\{\tan^3 x(\tan^2 x+1)-\tan^3 x\}dx=\frac{1}{4}\tan^4 x-I_3\,,$$

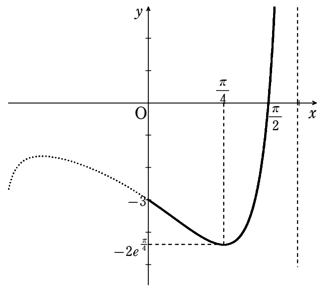
…

であり，ずいぶんすっきりした関係式であり，途中式である．

■　関数 $f(x)=e^x(\tan x-3)$ $(0\leqq x<\pi/2)$ を考えるとき，

$$f'(x)=e^x\left(\tan x-3+\frac{1}{\cos^2 x}\right)=e^x\,\frac{\sin x\cos x-3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$$

とすると，ここから先が大変で，分子を $2x$ で表示して合成してもうまくいかず，途方に暮れる．しかし，



$f'(x)=e^x(\tan x-3+1+\tan^2 x)$

$=e^x(\tan x-1)(\tan x+2)$

として，$f'(x)=0$ の解を $\tan x=1$ から $x=\pi/4$ とすれば解決である．

もっとも，$0\leqq x<\pi/2$ が卑怯な設定であることは認めるが…．

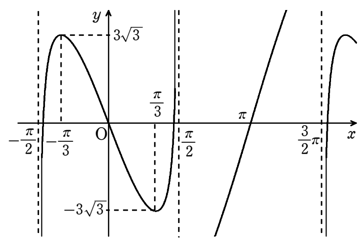
■　$\tan x$ は $\sin x$ や $\cos x$ の助けを借りずに $\tan x$ のまま処理をするという，異端児ならではの独自路線もありなのではないか．

■　さて，ふと思いついてここまで書いたのが 9 月 18 日．そしてこの話を数名の同僚にした．さらに，19 日の授業で「$(\tan x)'$ は $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるだけでなく，$1+\tan^2 x$ でもあることは記憶に値する」と強調した．

■　1 人の同僚が「$(\tan x)'=1+\tan^2 x$ が便利なんだとしたら，何で $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ が公式になっているんですかね？」と．

これは私も考えたことであったので，「単項式だからじゃないですかね．$1+\tan^2 x$ は 2 項式で，その意味では単純でないですから…」と返答した．

実際，例えば $y=\tan x-8\sin x$ を考えるとき，



$y'=1+\tan^2 x-8\cos x$

とするよりも，

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}-8\cos x$$

$$=\frac{-(8\cos^3 x-1)}{\cos^2 x}$$

とする方が扱いが簡便である．

$y'=1+\tan^2 x-8\cos x$ は，$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ とする手間がかかる．

■　そして，9 月 20 日午後，この日発売の『大学への数学 10 月号』を見てびっくり！

「講義／数Ⅲ　部分積分・置換積分」（青木亮二）に

$\displaystyle\int\tan^2 x\,dx$ は $(\tan x)'=1+\tan^2 x$ を用いて，

$\displaystyle\int((\tan x)'-1)dx=\tan x-x$　(＋定数)　と求めなければなりません．数Ⅲの微積分においては

$\boxed{\text{タンジェントのタンは異端児のタン}}$

なわけであって，それは定積分の漸化式を立てる場合も同じです．

とあるではないか．

■　やられた!!　先を越されてしまった．「異端児」まで同じだなんて….

2013 年 9 月 24 日