雑感　tan の半角に関するある級数

■　2017 年名古屋工大の問題の，級数の和が面白い．

θ を $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ を満たす定数とし，自然数 n に対して $a_n=\tan\frac{\theta}{2^n}$ とおく．

(1)　数列 $\{2^n a_n\}$ の極限を求めよ．

(2)　n が 2 以上のとき，$\frac{1}{a_n}-\frac{2}{a_{n-1}}=a_n$ が成り立つことを示せ．

(3)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}$ とおく．n が 2 以上のとき S_n を a_1 と a_n で表せ．

(4)　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ の和を求めよ．

■　丁寧に解いても良いのだが，ここではザックリとした感覚を交えて進めてみる．

一般に $x\fallingdotseq 0$ のとき $\tan x\fallingdotseq x$（$\sin x\fallingdotseq x$ のようなもの）であるから，n が大きいとき $a_n\fallingdotseq\frac{\theta}{2^n}$ である．したがって，(1)の答は $2^n\cdot\frac{\theta}{2^n}$ から θ．

(2)は tan の 2 倍角の公式から $a_{n-1}=\frac{2a_n}{1-a_n^{\,2}}$ が成り立つから，両辺÷2 の式の逆数をとって $\frac{2}{a_{n-1}}=\frac{1}{a_n}-a_n$．移項して終わり．

(3)は(2)がヒントで，$\frac{a_k}{2^k}=\frac{1}{2^k a_k}-\frac{1}{2^{k-1}a_{k-1}}$ $(k\geqq 2)$ であるから

$$S_n=\frac{a_1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{2^{k-1}a_{k-1}}+\frac{1}{2^k a_k}\right)=\frac{a_1}{2}-\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2^n a_n}$$ となる．

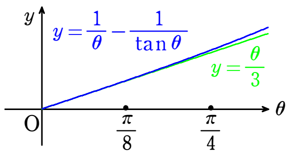
(4)は $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{2}-\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2^n a_n}\right)=\frac{a_1}{2}-\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{\theta}$　$(\because(1))$

ここで 2 倍角の公式によって $\frac{1}{2}\left(a_1-\frac{1}{a_1}\right)=\frac{a_1^{\,2}-1}{2a_1}=-\frac{1}{\tan\theta}$ に等しいから，和は $\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\tan\theta}$ に等しい．

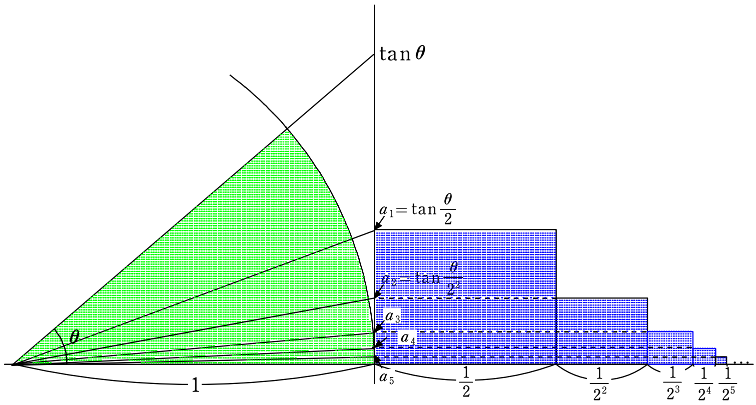
このような項を差の形にしていって加え，隣同士が消えていくという級数の和では，残った最後の項の極限が 0 となることが多いが，ここでは $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n a_n}=\frac{1}{\theta}$ となって 0 とならないのが面白い．

■　再びザックリ感覚で言うと，n が大きいとき $a_n\fallingdotseq\frac{\theta}{2^n}$ であるから，$\frac{a_n}{2^n}\fallingdotseq\frac{\theta}{4^n}$ であり，(4)は公比が $\frac{1}{4}$ の等比数列に近く，この和は特に θ が小さいときには $\frac{\theta/4}{1-1/4}=\frac{\theta}{3}$ に近いから，$\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\tan\theta}\fallingdotseq\frac{\theta}{3}$ である．

実際に 2 つのグラフを重ねてみると右のようになる．



■　従って，下図の扇形の面積 $\frac{\theta}{2}$ に対して長方形の面積の無限和について約 3 : 2 の関係があることになる．



2018 年 02 月 15 日