雑感　再び対数微分法のこと

■　「雑感」59「全微分と対数微分法」で，　$f(x)^{g(x)}$ のタイプの関数の微分を対数微分法によらずに微分する方法について述べた．

ただ，全微分の公式を用いるその方法は高校生には分かってもらえない方法である．

そこで，高校生にも理解できる方法を考えた．

■　まず，指数に関する「底の変換公式」を作ることから始める．

a^b の底を c に変換する．もちろん，$a>0,\ a\neq 1,\ c>0,\ c\neq 1$ を満たす．

$a^b=y$ とおき，両辺の底を c とする対数をとると $b\log_c a=\log_c y$ である．ここから，$y=c^{b\log_c a}$ となるから，$a^b=c^{b\log_c a}$ となり，これが指数に関する底の変換公式である．

次のように考えても良い．$a^b=y$ から $b=\log_a y$ で，右辺をよく知られた（対数の）底の変換公式によって，底を変換すると，$b=\dfrac{\log_c y}{\log_c a}$．よって $\log_c y=b\log_c a$ であるから，$y=c^{b\log_c a}$ となる．

さらには，「公式」$p^{\log_p M}=M$ を利用して，

$a^b=c^{\log_c a^b}=c^{b\log_c a}$　であるとすることもできる．

$a^b=c^{b\log_c a}$　あるいは，$a^b=c^{\log_c a^b}$

これが指数の「底の変換公式」である．

これを用いて微分する．

■　具体的な関数の微分を行ってみる．

(1)　$y=x^x\quad(x>0)$

底の変換公式により，$y=e^{x\log x}$．

よって，$y'=e^{x\log x}(x\log x)'=e^{\log x}(\log x+1)=x^x(\log x+1)$．

(2)　$y=x^{\sin x}\quad(x>0)$

底の変換公式により，$y=e^{\sin x\log x}$．

よって，

$$y'=e^{\sin x\log x}(\sin x\log x)'=e^{\sin x\log x}\left(\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

(3)　$y=(\sin x)^{\cos x}\quad(0<x<\pi)$

底の変換公式により，$y=e^{\cos x\log(\sin x)}$．

よって，

$$y'=e^{\cos x\log(\sin x)}(\cos x\log(\sin x))'$$

$$=e^{\cos x\log(\sin x)}\left(-\sin x\log(\sin x)+\frac{\cos x(\sin x)'}{\sin x}\right)$$

$$=e^{\cos x\log(\sin x)}\left(-\sin x\log(\sin x)+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$

$$=(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x-\sin^2 x\log(\sin x)}{\sin x}\right).$$

■　$f(x)^{g(x)}$ のタイプの関数の微分は対数微分法以外に方法がないなんて，なんて愚かな思いこみをしていたのだろう．

2012 年 10 月 3 日