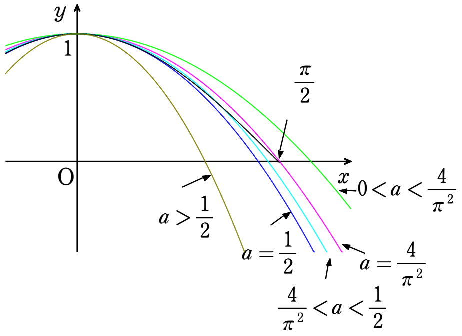
雑感　出題者が考えたかもしれないこと

$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ における $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ．ただし，$\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい．

今年(2013 年)の京都大学の入試問題．いわゆる典型的な関数ではないが，微分法(第 2 次導関数まで)を用いる扱いは受験生には手慣れたもののはずである．

■　さて，出題者は何を考えたのかということを邪推してみる．



$y_1 = \cos x$ (上のグラフ黒線)と $y_2 = 1 - ax^2$ $(a>0)$ という 2 つの関数を $|x| \leqq \frac{\pi}{2}$ で考えると，2 つの関数のグラフは上に凸で，グラフが酷似している（上のグラフの y_2 については，見やすくするために制限を省いて描いた）．

この 2 つのグラフは原点 O で接し，(よく知られたように) $a = \frac{1}{2}$ が 1 つの境界値で， $a \geqq \frac{1}{2}$ のとき，つねに $y_1 \geqq y_2$ (等号は $x=0$ のみで成立)である． $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき， y_1 と y_2 のグラフの上下関係が逆転する場合がある．ということは， $x \neq 0$ で $y_1 = y_2$ となる場合がある．ただし，$|x| \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲があるから，$y_1 = y_2$ となる x がその範囲にあるかどうかだが，$y_1 = \cos x = 0$ となる点 $\left(\pm\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ を $y_2 = 1 - ax^2$ が通るとき $a = \frac{4}{\pi^2}$ であり，これがそれを分ける境界値である．

$y = y_1 - y_2 = \cos x + ax^2 - 1$ は，$a > \frac{4}{\pi^2}$ のとき $x = \pm\frac{\pi}{2}$ で最大となり， $0 < a < \frac{4}{\pi^2}$ のとき $x = 0$ で最大となる．

したがって，この問題は x^2 の係数 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ と $\frac{4}{\pi^2}$ の大小比較に帰着し，$\sqrt{3}\pi^2 > 1.7 \times 3.1^2 = 16.3\cdots > 4^2$ より $\frac{\sqrt{3}}{4} > \frac{4}{\pi^2}$ であるから，

$\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ は $x = \pm\frac{\pi}{2}$ で最大となる．

■　このように，$y_1 = \cos x$ と $y_2 = 1 - ax^2$ $(a>0)$ という 2 つの関数のグラフを $|x| \leqq \frac{\pi}{2}$ で考えて，この問題はできたと考えられるが，違うだろうか．

とすれば，$y = \cos x + ax^2$ $\left(|x| \leqq \frac{\pi}{2}\right)$の最大値を，$a(>0)$ の値による場合分けで求めさせる方がよかったのではなかろうか．

それとも，$\sqrt{3}\pi^2 > 1.7 \times 3.1^2 = 16.3\cdots > 4^2$ より $\frac{\sqrt{3}}{4} > \frac{4}{\pi^2}$ といった不等式処理能力もみたいと考えたのだろうか(たいしたことではないと思うのだが…)．

2013 年 08 月 08 日