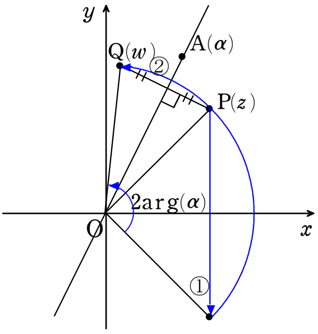
# 雑感　回転で対称移動する

■　複素数平面で, 原点 O を通る直線に関する点の対称移動は, 演習問題などで良く取り上げられる.

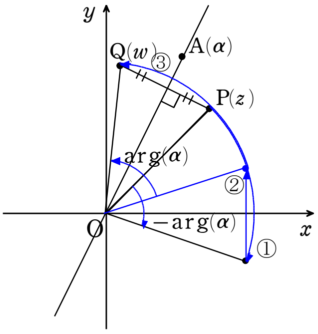
O と異なる 2 点 A$(\alpha)$ と P$(z)$ に対して, 直線 OA に関する点 P の対称点を Q$(w)$ とするとき, $w$ を $\alpha$, $z$ で表せ.

■　解法はさまざまあるが, よく見かけるのは次の 2 つの方法であると思われる.
＜その 1＞　P の実軸に関する対称点を O のまわりに $2\arg(\alpha)$ だけ回転する.
＜その 2＞　P を O のまわりに $-\arg(\alpha)$ だけ回転し, その点を実軸で折り返し, それを $\arg(\alpha)$ だけ回転する.

＜その 1＞




＜その 2＞




■　さて, ここで言わずもがなのことではあるが,

O 中心, 角 $\arg(\alpha)$ の回転　$\Leftrightarrow$　$\times\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$

である.
　したがって,

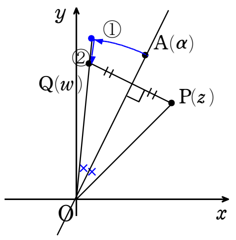
＜その 1＞　$w=\bar{z}\left(\dfrac{\alpha}{|\alpha|}\right)^2=\dfrac{\bar{z}\alpha^2}{|\alpha|^2}$ で速攻.

＜その 2＞　$w=\overline{z\dfrac{\bar{\alpha}}{|\bar{\alpha}|}}\cdot\dfrac{\alpha}{|\alpha|}=\dfrac{\bar{z}\alpha^2}{|\alpha|^2}$ で, やや面倒な印象を受ける.

　いずれも, 図を良く理解しなければならない. ポイントは実軸に関する対称移動（折り返し）で, 複素数的には共役をとることにあり, そこが理解のしどころである.

■　しかし, たかが∠POA＝∠AOQ のことでしかないから, 回転だけで処理できるはずである. 実際, 次のように, 点 A を ∠POA だけ回転させ,「長さ」を調整して Q を作ればよい.

＜その 3＞　A を $\angle\mathrm{POA}=\arg\left(\dfrac{\alpha}{z}\right)$ だけ回転させ, O 中心 $\dfrac{|z|}{|\alpha|}$ 倍の相似拡大を行えば, 点 Q になる.




$$w=\alpha\frac{\frac{\alpha}{z}}{\left|\frac{\alpha}{z}\right|}\cdot\frac{|z|}{|\alpha|}=\frac{\alpha^2|z|^2}{z|\alpha|^2}=\frac{\alpha^2z\bar{z}}{z|\alpha|^2}$$

$=\dfrac{\bar{z}\alpha^2}{|\alpha|^2}$　で解決である.

　共役をとるといった操作は必要ない. 点 A の回転という発想の逆転が奏功の理由かも知れない.

2014 年 10 月 20 日