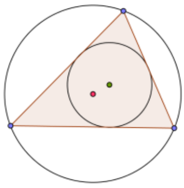
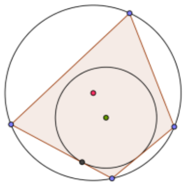
雑感　双心多角形

■　「双心」の 2 つとは，ここでは内心と外心のことである．つまり，内心と外心を持つ，したがって内接円と外接円の両方を持つ多角形ということである．



■　もちろん，三角形は常に内接円と外接円を持つ．しかし，四角形はそもそも円に内接するとは限らないし，仮に円に内接しても内接円が存在する保証はない．

　ということは，四角形が特殊な条件を持つときのみ，双心四角形になりうるかも知れない．

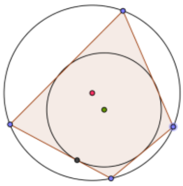


■　このテーマは，本校の 3 年生の課題研究の中で，ある生徒が「四角形に内心はあるのだろうか？」と考えたことにヒントをもらったものである．

　「一般の四角形でも良いけど，円に内接する」などといった条件をつけて考えてみても良いかも知れないね」と話をしたことがきっかけになっている．

　なお，一般の（円に内接しなくてもよい）四角形で「内心」が（内接円が）存在する条件は，対辺の和が等しいことであり，証明は易しい．

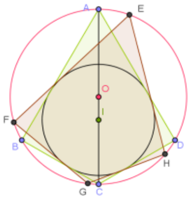
■　話を双心多角形に限る．実は，双心多角形の作図は容易でない．右図は GeoGebra で描いたものだが，円に内接する四角形を描き，2 つの内角の 2 等分線の交点を中心とし，そこから 1 辺に下ろした垂線の足までを半径とする円を描き，四角形の 1 頂点を動かしながら調整して描いた．努力したつもりだが，微妙にずれているような印象を受ける．



■　これに対して，右図の四角形 EFGH はいかがであろうか．実は黄緑の四角形 ABCD も同じ円に内外接する双心四角形である．

　これは，次のように作図した．

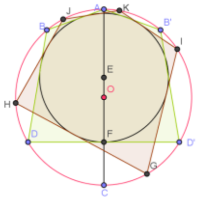
　まず，円 O 上の点 B の円の直径 AC に関する対称点 D をとって四角形(カイト型)ABCD を描く．この四角形には内接円が存在するのでそれを∠B の 2 等分線と AC の交点 I を中心として描く．これが内接円 I である．



ここからがすごい！　外接円 O 上に任意の点 E をとり，E から円 I に接線を引き円 O との交点を F，H とする．さらに F から円 O に接線を引き円 O との交点を G として，四角形 EFGH を作ると，これが円 O に内接し，円 I に外接する．

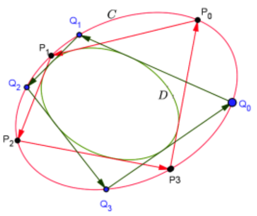
　GeoGebra 上では，点 E を円 O 上で動かすと，どのように動かしても四角形 EFGH が双心四角形になったまま動き，圧巻この上ない．

■　この性質を使えば，双心 5 角形などの作図もお手の物であるとまでは言わないものの，右の通りである．



■　なぜ，このようなことが可能なのかだが，実はポンスレ（Poncelet）の閉形定理が関連している．定理は次のようなものである．

　2 つの 2 次曲線 C, D がある．C 上の点 P_0 から D へ接線 l_1 を引く．l_1 と C との交点 P_0, P_1 とする．P_1 から D へ l_1 と異なる接線 l_2 を引く．l_2 と C との交点を P_1，P_2 とする．P_2 から D へ l_2 と異なる接線 l_3 を引く。l_3 と C との交点を P_2, P_3 とする．以下，これを続け，もし，$P_n = P_0$ になったとすると，C 上の他の点 Q_0 から出発して同じように接線を引いて，Q_1, Q_2, $\cdots$, Q_n を作ると $Q_n = Q_0$ となる．



　何とも恐ろしい定理である．

■　なお，双心四角形ではその面積が 4 辺の長さ a, b, c, d に対して $S = \sqrt{abcd}$ であるとか，2 円の半径と中心間距離などの関係式が明らかにされている．

2016 年 8 月 14 日