雑感　斜回転体の体積

■　積分で体積の計算を一通り指導した後，斜回転体の体積を扱う．

立体をどう切断し，どのように断面積を求め，立式するかがポイントになる．

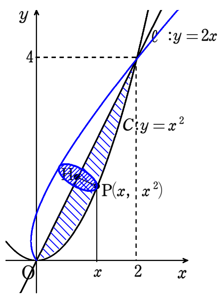
■　具体例で話をする．

放物線 C : $y=x^2$ と直線 ℓ : $y=2x$ で囲まれた図形を，直線 ℓ の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えよう．

■　まずは，レギュラーに回転軸に垂直な平面で切った場合である．

C 上の点 P$(x,\ x^2)$ を通り，直線 ℓ に垂直な平面が ℓ と交わる点を H とする．

この平面でこの立体を切ったとき，断面は半径 PH の円である．



$0\leqq x\leqq 2$ であるから

$$\mathrm{PH}=\frac{|2x-x^2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2x-x^2}{\sqrt{5}}$$

ここで注意しなければならないのは，

$$V=\pi\int_0^2\left(\frac{2x-x^2}{\sqrt{5}}\right)^2dx$$ としてはならないということである．

なぜなら，積分は x 軸方向でなく，ℓ 方向に積分しなければならないからである．

したがって，$\mathrm{OH}=t$ とすれば，$0\leqq t\leqq 2\sqrt{5}$ で，

$$V=\pi\int_0^{2\sqrt{5}}\left(\frac{2x-x^2}{\sqrt{5}}\right)^2dt$$ である．

ここで，x と t の関係は，P を通り ℓ に垂直な直線が $Y=-\frac{1}{2}(X-x)+x^2$ であるから，これと $Y=2X$ を連立して

$X=\frac{x(2x+1)}{5}$ であり，$\mathrm{OH}=\sqrt{5}X$ より $t=\frac{2x^2+x}{\sqrt{5}}$ である．

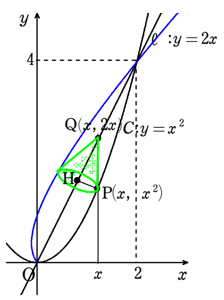
$dt=\frac{4x+1}{\sqrt{5}}dx$，$t:0\to 2\sqrt{5}\iff x:0\to 2$ より，

$$V=\pi\int_0^2\left(\frac{2x-x^2}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot\frac{4x+1}{\sqrt{5}}dx=\frac{16}{75}\sqrt{5}\pi$$ となる．

ℓ 方向の積分というところが分かりづらく，難しい．

■　さて，この体積を求めるとき，軸に垂直な平面ではなく，回転軸を軸とする円錐形で切断して積分して求める方法が，別解として近年の参考書では紹介されている．

区分求積法の利用として $\lim_{n\to\infty}\sum$ を $\int$ に直す形での解答が多いが，単に円錐形に切った断面積の積分で構わない．



ただ，なかなかイメージしづらい部分もあるので，くるくると手回しして削る鉛筆削り器で，この立体を削ることをイメージさせると良い．削り尽くしたとき，削りくずの体積の総和が体積に等しく，削りくずの体積はその表面積に厚さを掛けたもので近似される．

さて，この方法での計算上のポイントは，円錐の側面積の計算である．

母線の長さが R，底面の半径が r の円錐の側面積は πRr であることを「公式」としてよいかどうか．導くのはそう難しいことではないが，近年，高校入試の学習塾などが公式として覚えさせているかも知れない．

図の円錐の母線 $\mathrm{PQ}=2x-x^2$，底面の半径 $\mathrm{PH}=\frac{2x-x^2}{\sqrt{5}}$ から，円錐の側面積は $\frac{(2x-x^2)^2}{\sqrt{5}}\pi$ で，これが断面積である．

よって

$$V=\int_0^2\frac{(2x-x^2)^2}{\sqrt{5}}\pi\,dx=\frac{16}{75}\sqrt{5}\pi$$ となる．

円錐で切るということが慣れるまで分かりづらいが，被積分関数も平易で，計算が容易である．

■　さて，前半の方法が面倒である理由の 1 つが，OH の長さの計算にある．

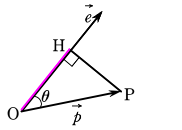
実は，ベクトルの内積を用いた次のような便法がある．

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}$方向の単位ベクトル$)|$

であるから，

$$\mathrm{OH}=\left|(x,\ x^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 2)\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}(x+2x^2)$$

とすれば，いとも簡単に求まるのだ．



$\vec{p}\cdot\vec{e}=\mathrm{OP}\cdot 1\cdot\cos\theta=\mathrm{OH}$

内積の正射影ベクトル的な利用であるが，このような活用ができることでベクトルの威力を知らしめるのにも，良い場面である．

2014 年 2 月 19 日