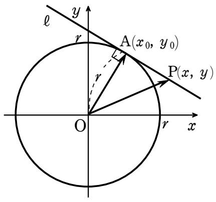
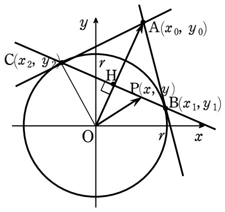
雑感　円と楕円の接線公式

■　円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 A $(x_0,\ y_0)$ における接線 ℓ が $x_0x+y_0y=r^2$ であることは，教科書に載っている基本事項である．



証明の方法は様々あるが，ℓ 上の点 P $(x,\ y)$ に対して，左辺を 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の内積とみて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影を考えれば，これが $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=r^2$ と等しいことがただちに了解される．

■　また，点 A $(x_0,\ y_0)$ が円の外部にあるとき，$x_0x+y_0y=r^2$ は点 A から円に引いた 2 本の接線の接点 B (x_1, y_1)，C (x_2, y_2) を通る直線（極線）であることも，（教科書には載っていなくても）受験生には承知の事実である．A は極である．



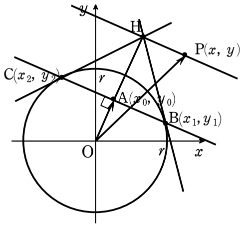
証明は人を食ったような，次の証明が一般的である．

$x_0x+y_0y=r^2$ …①　は $x,\ y$ の 1 次方程式なので直線である．

また，接線 AB，AC は $x_1x+y_1y=r^2$，$x_2x+y_2y=r^2$ であり，これらが点 A を通ることから，$x_1x_0+y_1y_0=r^2$，$x_2x_0+y_2y_0=r^2$ が成り立つ．このことから，直線①は 2 点 B，C を通る．よって，①は直線 BC である．

①の左辺を 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の内積とみて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影を考えれば，OA と BC の交点 H に対して，①の左辺は OA・OH に等しいことになり，①は OA・OH$=r^2$ となる．これは△OAC∽△OCH から分かることでもある．

■　では，点 A $(x_0,\ y_0)$ が円の内部（≠中心）にあるとき，直線 $x_0x+y_0y=r^2$ は何だろうか．



すでにお分かりであろうが，先ほどの A と H を入れ替えればよい．

すなわち，点 A を通り OA に垂直な直線が円と交わる点を B，C とし，2 点 B，C における円の接線の交点を H とするとき，点 H を通り OA に垂直な直線が $x_0x+y_0y=r^2$ である．

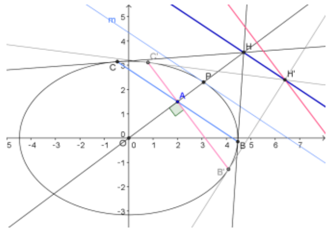
http://izumi-math.jp/F_Nakamura/kotewaza/tangential_line.pdf にも記述があると後に判明．

■　楕円などの 2 次曲線でも同じなのであろうか．

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内の点 A (x_0, y_0) に対して，直線

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \cdots ②$$

はどういう直線だろうか．



残念だが，「点 A を通り OA に垂直な直線が楕円と交わる点を B′，C′とし，2 点 B′，C′ における楕円の接線の交点を H′とするとき，点 H′ を通り OA に垂直な直線（図のピンク）」<u>ではない</u>．

正しくは，「直線 OA が楕円と交わる点における接線 m に平行で，点 A を通る直線が楕円と交わる点を B，C とし，2 点 B，C における楕円の接線の交点を H とするとき，点 H を通り，m に平行な直線（図の青）」である（1 次変換的に自明であろう）．

なお，線分 BC（薄青）は直線 OA を含む直径の共役弦である．

■　図を描いていて 1 つの予想を発見．H′ は②上に存在する．

実は，A を通る楕円の弦が楕円と交わる 2 点 P，Q に対して，2 点 P，Q における楕円の接点の交点 R は，常に②上にある．

2015 年 6 月 15 日