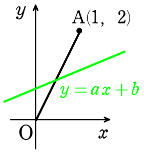
# 雑感　線分と交わる図形

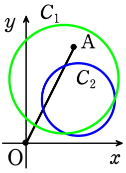
■　2 点 O(0, 0) , A(1, 2) に対して直線 $y=ax+b$ が線分 OA と共有点をもつ条件は，2 点 O と A が $f(x,y)=ax-y+b$ の正領域と負領域に存在する条件として，$f(0,0)\cdot f(1,2)\leqq 0$ で一発である．



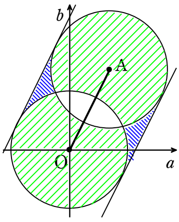

　ただ，こういう考え方を知らないとなかなか難しいところがある．

■　さて，これが直線でなく円であったら，こう簡単にはいかない．それは 2 点で交わるというケースがあり得るからである．

　例えば，$f(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$ のとき，円 $f(x,y)=0$ が 2 点 O(0, 0)，A(1, 2) と共有点をもつ条件は，$f(0,0)\cdot f(1,2)\leqq 0$ だけでは不十分である．言うまでもなく，右の $C_1$ のように 1 点で交わるなら，O，A は正負の異なる領域にあるが，$C_2$ のように 2 点で交わる場合，O，A は正負の同じ領域にある．




■　1 点で交わる場合については，領域の境界線が，O を通る半径 $r$ の円と，A を通る半径 $r$ の円である．$r$ の値と OA の長さによって幾つかの場合があるが，一般には $f(0,0)\cdot f(1,2)\leqq 0$ の表す領域は $ab$ 平面上で，右の緑斜線部分のようになる．

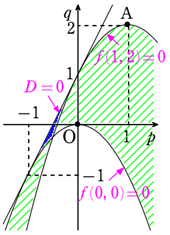



　2 点で交わる場合については，線分 OA を $x=t$，$y=2t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ と表示して，$f(t,2t)=0$（という，$t$ の 2 次方程式）が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲に 2 つの解を持つ条件を求める．それを $ab$ 平面上に図示すると図の青い斜線部分になり，この境界線は 2 円の共通外接線である．

■　この領域全体の外側の輪郭については，線分 OA 上の点から $r$ の距離にある点の軌跡として考えれば十分納得がいく．

■　では，放物線の場合はどうか．

　結果論ではあるが，$f(x,y)=(x-p)^2+q-y$ に対して，放物線 $f(x,y)=0$ が線分 OA と共通点をもつ条件を図示すると右のようになる．




　2 つの放物線（頂点が O と A である）とそれらの共通接線で囲む青い領域に頂点があれば，その放物線は線分 OA と 2 点で交わる．

　ただ，計算抜きでのこの説明は，円のようには容易ではなさそうだ．

■　2005 年の京大の問題「$xy$ 平面上の原点と点(1, 2) を結ぶ線分（両端を含む）を $L$ とする．曲線 $y=x^2+ax+b$ が $L$ と共有点を持つような実数の組 $(a,b)$ の集合を $ab$ 平面上に図示せよ」に，この結果を用いて見る．

$$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}\text{ であるから，}p=-\frac{a}{2},\ q=b-\frac{a^2}{4}$$

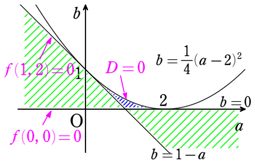
とおくと，$f(x,y)=(x-p)^2+q-y$ として，求める条件は，円の場合と同様にして，$f(0,0)\cdot f(1,2)\leqq 0$ または，「$2p-q+1\geqq 0$（判別式から）かつ $-1\leqq p\leqq 0$ かつ $f(0,0)\geqq 0$ かつ $f(1,2)\geqq 0$」である．

$$f(0,0)=p^2+q=\left(-\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}=b,$$

$$f(1,2)=(p-1)^2+q-2=\left(\frac{a}{2}+1\right)^2+b-\frac{a^2}{4}-2=b+a-1,$$

$$2p-q+1=-a-b+\frac{a^2}{4}+1=\frac{1}{4}(a-2)^2$$

などから，右図の斜線部領域となる．




　上の $pq$ 平面上の境界線と見比べると，上の放物線が下では直線に，上の直線が下では放物線に変わっているのは，言うまでもなく $p,\ q$ が $a,\ b$ の 2 次式で対応づけられているからである．

■　このような迂遠な解法を勧めるわけではないが，上記の 2 つの放物線（頂点が O と A）とそれらの共通接線との関わりが明瞭に見えるという意味で記してみた．

2016 年 9 月 2 日