雑感　「線分」の難しさ

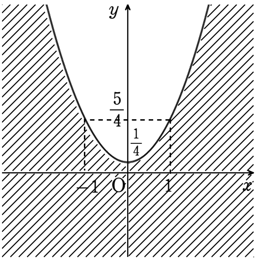
■　次のような問題が問題集にあり，授業の演習で扱う．

> 放物線　$y=x^2$　上に 2 点 P$(t,\ t^2)$，Q$(t+1,\ (t+1)^2)$ をとる．
> (1)　t がすべての実数を動くとき，直線 PQ が通過する領域を図示せよ．
> (2)　t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過する領域を図示せよ．　〔2009　横浜国大〕

■　(1)は定番の問題だ．

直線 PQ の方程式を $y=(2t+1)x-t^2-t$　…　①　と求めた後，

これを t の 2 次方程式 $t^2+(1-2x)t+(y-x)=0$ …②とみて，これが実数解をもつ条件から求めればよいことを，手法と考え方の双方から指導しておく必要がある．



②の判別式を D とすると

$D=(1-2x)^2-4(y-x)\geqq 0$

から $y^2\leqq x^2+\dfrac{1}{4}$

となり，図の斜線部である．

■　(1)は t が実数全体を動く場合だが，それが $-1\leqq t\leqq 0$ のように制限された場合は，直線 PQ であれば②がその範囲に(少なくとも 1 つの)実数解をもつ条件を求めればよい．

ただ，注意しなければならないのは，(2)は t の制限に加えて「線分 PQ」となっているため難しい．

■　(2)で，t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，直線 PQ が通過する領域を，とりあえず求めておこう．

$f(t)=t^2+(1-2x)t+(y-x)$ とおくと

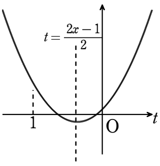
$f(t)=\left(t-\dfrac{2x-1}{2}\right)^2-x^2+y-\dfrac{1}{4}$ である．

②が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲に実数解をもつ条件は

(i)　$-1<t<0$ に異なる 2 つの実数解　or　1 つの重解をもつ場合

$D\geqq 0$ かつ $f(-1)=x+y>0$ かつ

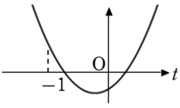
$f(0)=-x+y>0$ かつ　軸から　$-1<\dfrac{2x-1}{2}<0$



よって，$y\leqq x^2+\dfrac{1}{4}$，$y>-x$，$y>x$，$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$

(ii)　$-1<t<0$ に重解でない解を 1 つだけもつ場合

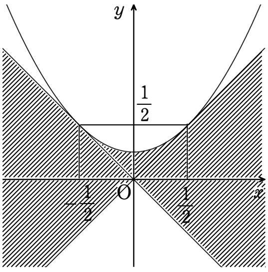
「$f(-1)=x+y>0$ かつ $f(0)=-x+y<0$」または「$f(-1)=x+y<0$ かつ $f(0)=-x+y>0$」



(iii)　$t=-1$ または $t=0$ に解をもつ場合

$f(-1)=x+y=0$ または $f(0)=-x+y=0$

(i)(ii)(iii)から，直線 PQ が通過する範囲は右の斜線部で境界線を含む．



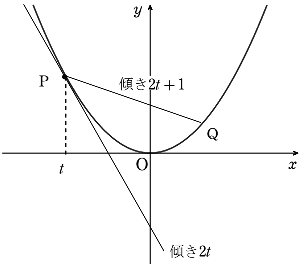
■　線分 PQ の存在範囲は，当然ながらこの領域よりも「狭い」範囲である．

さて，それをどうやって求めたものか….

手元の問題集の「詳解」には，次のような記述がある．

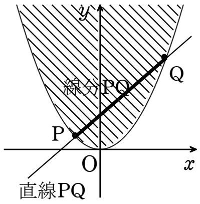
2012 年 12 月 14 日

点 P (t, t^2) における放物線 $y=x^2$ の接線の傾きは $y'=2x$ から $2t$ である．①から直線 PQ の傾きは $2t+1(>2t)$ であるから，線分 PQ は座標平面において
$y\geqq x^2\cdots$③　の範囲にある．
よって，③と(i)〜(iii)の場合を合わせた領域である．

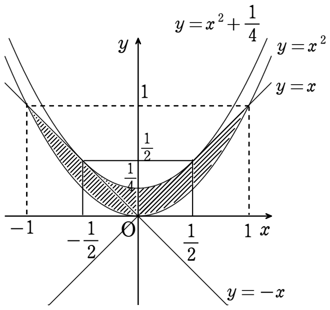


図形的には右上の通り（図は載っていない）だが，この説明で生徒は分かってくれるだろうか．

■　これを，
「①の 1 本の直線 PQ に対して，線分 PQ は直線のうち $y\geqq x^2$ を満たす部分である（右図参照）」
としてはどうであろうか．



すると線分 PQ の存在領域は，上の斜線部のうち，$y\geqq x^2$ を満たす部分である．
よって，下の図の斜線部で境界線を含む．

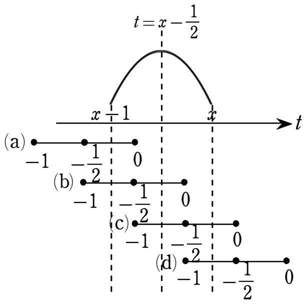


■　この問題の話をしていた場所に通りかかった同僚から，こういう方法で処理すれば，$y\geqq x^2$ の条件も「式」から出てきますよというアドバイスをいただいた．
それを，噛み砕くと以下のようになる．

■　線分 PQ は 直線 $y=(2t+1)x-t^2-t$ の $t\leqq x\leqq t+1$ の部分である．また，$t\leqq x\leqq t+1$ から $x-1\leqq t\leqq x$ である．

$y=(2t+1)x-t^2-t=-\left(t-x+\frac{1}{2}\right)^2+x^2+\frac{1}{4}=f(t)$ とする．

(a)　$0<x-\frac{1}{2}$　∴ $\frac{1}{2}<x$ のとき
$f(x-1)\leqq y\leqq f(0)$ より
$x^2\leqq y\leqq x$．



(b)　$-\frac{1}{2}<x-\frac{1}{2}\leqq 0$
∴ $0<x\leqq\frac{1}{2}$ のとき
$f(x-1)\leqq y\leqq f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ より
$x^2\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}$．

(c)　$-1<x-\frac{1}{2}\leqq-\frac{1}{2}$　∴ $-\frac{1}{2}<x\leqq 0$ のとき
$f(x)\leqq y\leqq f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ より　$x^2\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}$．

(d)　$x-\frac{1}{2}\leqq-1$　∴ $x\leqq-\frac{1}{2}$ のとき
$f(x)\leqq y\leqq f(-1)$ より $x^2\leqq y\leqq -x$．

■　う〜む．線分は難しいなあ．

2012 年 12 月 14 日