雑感　加法定理を表示する曲線

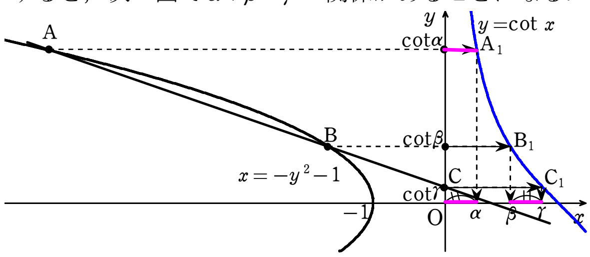
■　数学セミナー2018 年 7 月号の NOTE に，拙投稿の『加法定理を表示する曲線』が掲載の運びとなった．

編者 ZZZ 氏によって，拙原稿が簡潔にまとめ直されているが，「少し具体性に欠けていて，分かりづらい」との元同僚のコメントがある．そこで，送った原稿を元にして少し補足したい．

■　曲線 $C: x=-y^2-1$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(-a^2-1,\ a)$，$\mathrm{B}(-b^2-1,\ b)$ を通る直線 $y-a=-\dfrac{1}{a+b}(x+a^2+1)$ の y 切片は $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{ab-1}{a+b}\right)$ である．

ここで $a=\cot\alpha$，$b=\cot\beta$ とおくと，$f(t)=\cot t$ の加法定理により $\dfrac{ab-1}{a+b}=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}=\cot(\alpha+\beta)$ である．

図示すると，次の図で $\alpha+\beta=\gamma$ の関係があることになる．



これは，2017 年九州大学・理学部後期の入試問題を元にして図式化したものである．

$\cot t$ という関数の加法定理を表示するのに，放物線 $x=-y^2-1$ が使われているが，$x=p(y^2+1)$ $(p\neq 0)$ で構わない．

■　さて，$f(t)=\cot t$ に対して，どのようにして $C: x=-y^2-1$ が作られたのであろうか．

以降，関数 $f(t)$ の加法定理を表示する曲線 C の方程式を $x=g(y)$ とする．

一般に，曲線 $C: x=g(y)$ 上の 2 点 $(g(a),\ a)$，$(g(b),\ b)$ を通る割線の y 切片は $a-\dfrac{(b-a)g(a)}{g(b)-g(a)}$ となる．$a=f(\alpha)$，$b=f(\beta)$ とするとき，この y 切片が $f(\alpha+\beta)$ に等しいとする．

$\boxed{f(t)=\cot t}$ においては

$$f(\alpha+\beta)=\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}=\frac{f(\alpha)f(\beta)-1}{f(\alpha)+f(\beta)}=\frac{ab-1}{a+b}$$

であるから，$a-\dfrac{(b-a)g(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{ab-1}{a+b}$ $(a\neq b)$　……　①

が成り立つ．

$-\infty<\cot t<\infty$ であるから，①において $a=0$，$b=y$ とすると

$\dfrac{yg(0)}{g(0)-g(y)}=-\dfrac{1}{y}$ となり，$g(0)=c$ とおくと $g(y)=c(y^2+1)$ となる．

これで求まったが，十分性は次のように確認できる．

①の左辺 $=a-\dfrac{(b-a)c(a^2+1)}{c(b^2+1)-c(a^2+1)}=a-\dfrac{a^2+1}{a+b}=$ ①の右辺．

$g(y)$ の微分可能性を仮定すれば，ここから微分方程式を作ることもできる．

$b\to a$ とした極限をとって $a=y$ とすれば，①から

$y-\dfrac{g(y)}{g'(y)}=\dfrac{y^2-1}{2y}$ という微分方程式が導かれる．

これは，$b\to a$ としたとき割線が $y=a$ における接線に移るから，$a-\dfrac{g(a)}{g'(a)}$ は $x=g(y)$ の $y=a$ における接線の y 切片である．

また，右辺の $\dfrac{y^2-1}{2y}$ は $y=\cot t$ としたときの 2 倍角

$\cot 2t=\dfrac{\cot^2 t-1}{2\cot t}$ の式に等しい．

この微分方程式は $\dfrac{g'(y)}{g(y)}=\dfrac{2y}{y^2+1}$ の変形から

$\displaystyle\int\frac{g'(y)}{g(y)}dy=\int\frac{2y}{y^2+1}dy$ より $\log|g(y)|=\log(y^2+1)+c'$ となり，$g(y)=c(y^2+1)$ が導かれる．

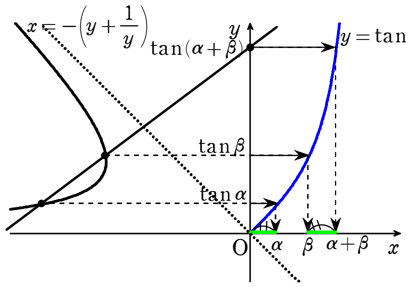
■　$\boxed{f(t)=\tan t}$ についても C の方程式を求めてみる．微分可能性を仮定すれば，$\tan t$ の 2 倍角の公式が $\tan 2t=\dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$ であるから，$y-\dfrac{g(y)}{g'(y)}=\dfrac{2y}{1-y^2}$ という微分方程式ができる．

ここから $\dfrac{g'(y)}{g(y)}=\dfrac{y^2-1}{y(y^2+1)}$ となり，右辺は $\dfrac{2y}{y^2+1}-\dfrac{1}{y}$ と変形できるから，両辺を積分して，$\log|g(y)|=\log(y^2+1)-\log|y|+c'$．

よって，$y>0$ としておけば，$g(y)=\dfrac{c(y^2+1)}{y}=c\left(y+\dfrac{1}{y}\right)$ となる．

これについても，十分性を確認できる（計算省略）．

図示すれば，次の通り．



なお，同様にして双曲線関数 $\coth t$ では $C: x=c(y^2-1)$ が，$\tanh t$ では $C: x=c\left(y-\dfrac{1}{y}\right)$ が得られる．

■　$\sin t$，$\cos t$ でも決定できないものだろうか．

$f(t)=\cos t$ について，微分方程式を用いて $g(y)$ を求めてみる．

$\cos t$ の 2 倍角の公式から，$y-\dfrac{g(y)}{g'(y)}=2y^2-1$（$|y|\leqq 1$）となる．

ここから $\dfrac{g'(y)}{g(y)}=\dfrac{1}{1+y-2y^2}$ となり，右辺は $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{2y+1}-\dfrac{1}{y-1}\right)$ と変形できるから，両辺を積分して，$\log|g(y)|=\dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{2y+1}{y-1}\right|+c'$ より，$g(y)=c\sqrt[3]{\dfrac{2y+1}{1-y}}$ となる．

十分性の確認のために $0\leqq y\leqq 1$ に制限して，①に相当する

$a-\dfrac{(b-a)g(a)}{g(b)-g(a)}=ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ ……②

が成り立つか否か調べる．

$h(a,\ b)=a-\dfrac{(b-a)g(a)}{g(b)-g(a)}-ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ とおく．

例えば $h\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{4}{5}-\dfrac{\sqrt[3]{26}}{5(\sqrt[3]{26}-\sqrt[3]{11})}\fallingdotseq -0.00228\cdots\neq 0$ であるから

②が成り立たず，これは $\cos t$ に対する加法定理を表示する曲線とならない．

したがって，$\cos t$ ではこのような曲線は存在しない（$\sin t$ についても同様である）．

■　数学セミナー2018 年 7 月号，44 頁の図は，上段が放物線 $x=p(y^2+1)$ （図では $p<0$ となっている)であり，下段が双曲線 $x=p\left(y+\dfrac{1}{y}\right)$ （図では $p<0$ となっている）である（$x=py$ という漸近線が表示されていないため，少し違和感のある曲線になっているように感じる）．

なお，雑誌『初等数学』第 83 号（2018 年 4 月）に「割線の切片と加法定理」として，この内容の詳述がある．