

雑感 整数問題は難しい

■ 2年生文系の演習で、問題集に収められた次のような問題を扱う。

2次不等式 $2x^2 + (4-7a)x + a(3a-2) < 0$ の解がちょうど3個の整数を含むとき、正の定数 a の値の範囲を求めよ。[2006 中京大]

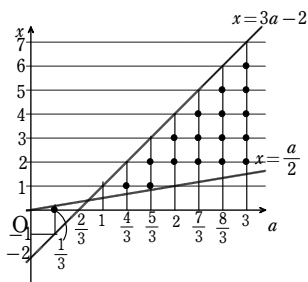
与えられた不等式は $(2x-a)\{x-(3a-2)\} < 0$ となり、この解は $\frac{a}{2} = 3a-2$ のとき解なし。 $3a-2 < \frac{a}{2}$ のとき、 $3a-2 < x < \frac{a}{2}$ …①、 $\frac{a}{2} < 3a-2$ のとき、 $\frac{a}{2} < x < 3a-2$ …②である。

ここからどうするかが難しい。

■ 手元の問題集の解答(数研出版)は、次のように求めている。

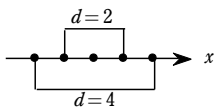
「 $a > 0$ における、 $x = \frac{a}{2}$ 、

$x = 3a-2$ のグラフは右のようになる。図から、①を満たす整数 x は2個以下である。また、②を満たす整数 x がちょうど3個になる条件は $\frac{5}{3} < a < 2$ 、 $2 < a \leq \frac{7}{3}$ である」



う〜ん。こんな解法分かってもらえるかなあ。そして、このグラフをしっかりと読み取って答を出せるだろうか。

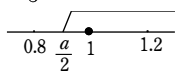
■ そこで、こんなことを考えてみた。①、②の「解の x の幅」 $d = \left| 3a-2 - \frac{a}{2} \right|$ とおく。この範囲にちょうど3つの整数が含まれるために必要な条件は、 $2 < d \leq 4$ である。



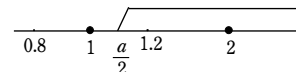
よって、 $2 < \left| 3a-2 - \frac{a}{2} \right| \leq 4$ で、これを解くと $-\frac{4}{5} \leq a \leq \frac{12}{5}$ かつ

「 $a < 0$ または $\frac{8}{5} < a$ 」から、 $\frac{8}{5} < a \leq \frac{12}{5}$ となる。

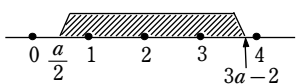
したがって、解は②の場合に限られ、 $0.8 < \frac{a}{2} \leq 1.2$ となるから、



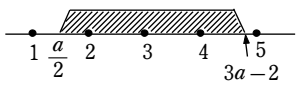
②に含まれる最小の整数 n は $n=1, 2$ である。



$n=1$ のとき

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{a}{2} < 1 \\ 3 < 3a-2 \leq 4 \end{cases} \therefore \frac{5}{3} < a < 2$$


$n=2$ のとき

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{a}{2} < 2 \\ 4 < 3a-2 \leq 5 \end{cases} \therefore 2 < a \leq \frac{7}{3}$$


以上から、求める範囲は $\frac{5}{3} < a < 2$ 、 $2 < a \leq \frac{7}{3}$ 。

■ 「解の幅」を考えるのが鍵だったが、これは範囲を絞り込むための必要条件だった。

いずれにしても、整数問題は典型的な問題を別とすれば、一筋縄ではいかないものが多い。