雑感　一筋縄で行かない整数問題

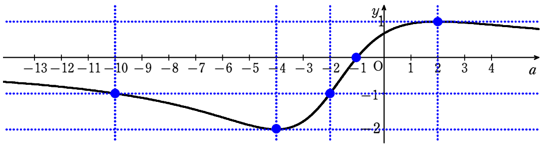
■　雑誌『大学への数学』2018 年 9 月号の特集は，「整数が得意になりたい！」である．「整数」は，教科書と入試問題の間に大きなギャップのあるテーマの 1 つである．その「日々の演習」**9・15** に次の問題があり，難易度 C***（発展，30 分目安）である．

> $\dfrac{8a+8}{a^2+4a+12}$ が整数となる整数 a の値をすべて求めよ．
>
> ［2018 千葉大（後期）・理，工，医］

■　「解答」は，与分数式を①として，$a\neq-1$ のとき$|①|\geqq 1$ として，a の値を-10～-2，2 の整数に絞り込み，チェックしている．また，別解としては，$①=n$ として，a の 2 次方程式の判別式 $D\geqq 0$ からの絞り込みをしている［詳細は，雑誌 p.25～を］．

しかし，$y=①$のグラフを描けば，y のとり得る整数値は $-2,\ -1,\ 0,\ 1$ に限られ，それぞれの値をとる a の値は，$①=-1$ について調べるだけで，他はグラフを描く段階で自明である．

数学Ⅲまでの範囲であることを考慮すれば，この解法は容易で時間もかからない．難易度は A と B の中間，時間は 10 分*か．



■　発展演習は「普通できひん整数の難問」と銘打って 6 題が並ぶ．その中の 1 題を取り上げてみる．　難易度 C****である．

> (1)　$x,\ y,\ z$ を実数とする．$x^3+y^3+z^3-3xyz>0$ のとき，$x+y+z>0$ が成り立つことを示せ．
>
> (2)　$x^3+y^3+z^3-3xyz=25$ および $x\leqq y\leqq z$　を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ をすべて求めよ．　［2018 年横浜国大(後期)・理工，都市］

(1)については省く．(2)の解答は $x+y+z=a,\ y-x=b,\ z-y=c$　とおいて，$(a,\ b^2+bc+c^2)=(1,\ 25),\ (25,\ 1)$ を導いて解いているが，技巧的である．$x,\ y,\ z$ の基本対称式などを用いて処理しても良いが，手間がかかる旨の註記がある．

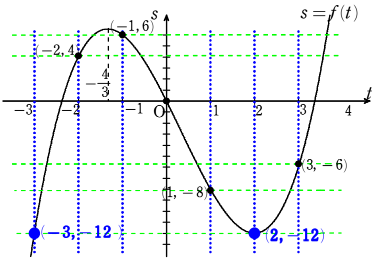
■　$x,\ y,\ z$ の基本対称式などを用いたとき，

$(x+y+x,\ x^2+y^2+z^2,\ xy+yz+zx)=(1,\ 17,\ -8),\ (25,\ 209,\ 208)$ を導くまでは難しくはないので，その先を考えてみる．

(i)　$(x+y+x,\ x^2+y^2+z^2,\ xy+yz+zx)=(1,\ 17,\ -8)$　のとき

　$x,\ y,\ z$ は，t の 3 次方程式 $t^3-t^2-8t=xyz$ の実数解である．

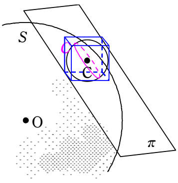
$s=f(t)=t^3-t^2-8t$ のグラフを少し丁寧に描き，これと直線 $s=xyz$ を考えれば，その共有点が 3 個(2 重解を 2 個と考える)でしかも格子点になる場合は，$t=-3,\ 2,\ 2,$　$xyz=-12$ の場合だけである．このとき，$x=-3,$ $y=z=2$ で，他の条件も満たすことが確認できる．



■　しかし，この方法は次の場合では容易でないことがグラフを描いてみれば分かる．したがって，別の解法が必要になる．

(ii)　$(x+y+x,\ x^2+y^2+z^2,\ xy+yz+zx)=(25,\ 209,\ 208)$ のとき

球面 $S:x^2+y^2+z^2=209$ と平面 $\pi:x+y+z=25$ の交円 C 上の格子点を見つければよい．C の中心が $\mathrm{C}\left(\dfrac{25}{3},\ \dfrac{25}{3},\ \dfrac{25}{3}\right)$，$S$ と π の距離 $\dfrac{25}{\sqrt{3}}$ から，C の半径が $\sqrt{\dfrac{2}{3}}<1$ と分かる．C を中心，半径 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ の球面内の点 $(u,\ v,\ w)$　の座標は，$\dfrac{25}{3}-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\leqq u\leqq\dfrac{25}{3}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　（$v,\ w$ も同範囲）である（∵図の青い立方体の内部に含まれる）から，整数 $u,\ v,\ w$ は 8 または 9 しかない．あとは条件を満たすように値を探せば，$x=y=8,\ z=9$ となる．



実は，(i)をこの方法で解こうとすると，上手く絞り込めない．

■　この解法を best とはしないが，整数問題は一筋縄ではいかない．

2018 年 09 月 01 日