雑感　三角関数のある有限和

■　元同僚の友人との酒席で，「三角関数にかかわる奇妙な和があるんですが，ご存じですか？」と尋ねられたが，雲をつかむような話で「さあ？」と答えるしかなかった．何しろ友人もその具体的な式を覚えていなかったし，酒席でもあったので….

その後，「大数にも載っていた」という手がかりで，『大学への数学』2017 年 2 月号の巻頭言に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}=\frac{n^2-1}{3}$ という式を見つけた．多分，この式であろう．

■　え～，こんな式が成り立つの？と驚きつつ具体的な n で確かめてみると確かに成り立つ．証明はどうするのだろう．

道具としてはド・モアブルと 2 項定理かなとは思ったが，ぞろぞろ出てくる 2 項係数をどうするのだろうと，鉛筆も動かさずに逡巡していた．

■　そうこうするうち，大数の 3 月号の「編集部のノートから」にこれに関する話題が取り上げられ，証明の道筋が示されていた．

予想どおりド・モアブルと 2 項定理が道具で，もう 1 つの道具が解と係数の関係というのは，言われてみればなるほどである．

3 月号にはこの式につながる式の証明はあるものの，この式そのものの証明は載っていないので，その部分を埋めてみたい．

■　最初に n は 2 以上の自然数であるが，n の偶奇で分ける．

n が奇数 $2m+1\ (m\geqq 1)$ のとき，上の和の左辺は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}$ であり，$y=\sin x\ (0<x<\pi)$ が直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であるから，左辺は $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}$ に等しい．

また，n が偶数 $2m\ (m\geqq 1)$ のとき，同様の理由によって左辺は

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2m}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}+\sum_{k=m+1}^{2m-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2m}}=1+2\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2m-1}}$$

に等しいことに注意しておく．

■　まず，n が奇数 $2m+1\ (m\geqq 1)$ のときを考える．このとき

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}=\frac{2m(m+1)}{3}$ となることが，大数の 3 月号に証明されている．　以下は，ほぼそれをなぞったものである．

簡単のために，$\theta_j=\dfrac{j\pi}{2m+1}$ （$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）とおく．

$z=\cos\theta_j+i\sin\theta_j$ とおくと，ド・モアブルの定理によって

$z^{2m+1}=\cos j\pi+i\sin j\pi=(-1)^j$ である．一方，2 項定理により

$$z^{2m+1}={}_{2m+1}\mathrm{C}_0\cos^{2m+1}\theta_j+i\,{}_{2m+1}\mathrm{C}_1\cos^{2m}\theta_j\sin\theta_j$$
$$-{}_{2m+1}\mathrm{C}_2\cos^{2m-1}\theta_j\sin^2\theta_j-i\,{}_{2m+1}\mathrm{C}_3\cos^{2m-2}\theta_j\sin^3\theta_l+\cdots$$

この 2 式の虚部から

$${}_{2m+1}\mathrm{C}_1\cos^{2m}\theta_j\sin\theta_j-{}_{2m+1}\mathrm{C}_3\cos^{2m-2}\theta_j\sin^3\theta_j+\cdots=0\quad\cdots\quad ①$$

が成り立つ．この両辺を $\sin^{2m+1}\theta_j\ (\neq 0)$ で割り，

$\dfrac{\cos^2\theta_j}{\sin^2\theta_j}=x\ (=\cot^2\theta_j)$ とおけば，①は

$${}_{2m+1}\mathrm{C}_1x^m-{}_{2m+1}\mathrm{C}_3x^{m-1}+\cdots=0\quad\cdots\quad ②$$

となる．ここで $\theta_j=\dfrac{\pi}{2m+1},\ \dfrac{2\pi}{2m+1},\ \cdots,\ \dfrac{m\pi}{2m+1}\ \left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$j=1,\ 2,\ \cdots,m$　に対して $\cot^2\theta_j$ は異なる値であり，しかもこの m 個の $\cot^2\theta_j$ はすべて②を満たす（②の解である）から，解と係数の関係により，$\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\cot^2\theta_j=\frac{{}_{2m+1}\mathrm{C}_3}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_1}=\frac{2m(2m-1)}{6}=\frac{m(2m-1)}{3}$

となる．さらに，$1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ であるから，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin^2\theta_k}=\sum_{k=1}^{m}(1+\cot^2\theta_k)=m+\frac{m(2m-1)}{3}=\frac{2m(m+1)}{3}$ となって，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}=2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2m+1}}=\frac{4m(m+1)}{3}$ となり，$n=2m+1$ から $m=\dfrac{n-1}{2}$ を代入すれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}=\frac{n^2-1}{3}$ となる．

■　次に n が偶数 $2m(m\geqq 1)$ のときを考える．

$\theta_j=\dfrac{j\pi}{2m}$ （$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$）とおく．

$z=\cos\theta_j+i\sin\theta_j$ とおくと，ド・モアブルの定理によって

$z^{2m}=\cos j\pi+i\sin j\pi=(-1)^j$ である．一方，2 項定理により

$$z^{2m}={}_{2m}\mathrm{C}_0\cos^{2m}\theta_j+i\,{}_{2m}\mathrm{C}_1\cos^{2m-1}\theta_j\sin\theta_j$$
$$-{}_{2m}\mathrm{C}_2\cos^{2m-2}\theta_j\sin^2\theta_j-i\,{}_{2m}\mathrm{C}_3\cos^{2m-3}\theta_j\sin^3\theta_j+\cdots$$

この 2 式の虚部から

$${}_{2m}\mathrm{C}_1\cos^{2m-1}\theta_j\sin\theta_j-{}_{2m}\mathrm{C}_3\cos^{2m-3}\theta_j\sin^3\theta_l+\cdots=0\quad\cdots\quad ③$$

が成り立つ．この両辺を $\sin^{2m-1}\theta_j\cos\theta_j\ (\neq 0)$ で割り，

$\dfrac{\cos^2\theta_j}{\sin^2\theta_j}=x\ (=\cot^2\theta_j)$ とおけば，③は

$${}_{2m}\mathrm{C}_1x^{m-1}-{}_{2m}\mathrm{C}_3x^{m-2}+\cdots=0\quad\cdots\quad ④$$

となる．以下は全く同様で，④において解と係数の関係により

$\displaystyle\sum_{j=1}^{m-1}\cot^2\theta_j=\frac{{}_{2m}\mathrm{C}_3}{{}_{2m}\mathrm{C}_1}=\frac{(2m-1)(2m-2)}{6}=\frac{(2m-1)(m-1)}{3}$ となる．

したがって，

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2m}}=\sum_{k=1}^{m-1}\left(1+\cot^2\frac{k\pi}{2m}\right)=m-1+\frac{(2m-1)(m-1)}{3}=\frac{2(m^2-1)}{3}$$

となるから，先の注意と $n=2m$ とから

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}=1+\frac{4(m^2-1)}{3}=\frac{4m^2-1}{3}=\frac{n^2-1}{3}$ が得られた．

■　なお，大数 3 月号のこの記事で，「三角関数の逆数の 2 乗和（有限和）なら簡単な式で表される，というのは何とも不思議」という記述があって，文意が曖昧である．逆数でなくとも 2 乗和なら，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2}$ であることが，半角公式と $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}=0$ からただちに分かるから，「逆数の 1 乗和は無理だけれども」という意味合いの文章なのであろう．

■　岩波の『数学公式 II』の p.14 に，$\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\cot^2\frac{r\pi}{2n+1}=\frac{1}{3}n(2n-1)$ などの公式が載っているし，p.20 には次のような記述もある．

$$\sum_{r=1}^{n}\mathrm{cosec}^2\left[x+\frac{2(r-1)\pi}{n}\right]=\begin{cases}n^2\mathrm{cosec}^2nx & [n:\text{奇数}]\\ \dfrac{n^2}{2}\mathrm{cosec}^2\dfrac{nx}{2} & [n:\text{偶数}]\end{cases}.$$

驚きである．数列 $\left\{x+\dfrac{2(r-1)\pi}{n}\right\}$ は，初項 x，公差 $\dfrac{2\pi}{n}$ の等差数列である．$x=\dfrac{\pi}{n}$ とすれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cosec}^2\frac{2k-1}{n}\pi$ が，$x=\dfrac{2\pi}{n}$ とすれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cosec}^2\frac{2k}{n}\pi$ が求められることになる．

例えば，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2m}\mathrm{cosec}^2\frac{2k-1}{2m}\pi=\left(\frac{2m}{2}\right)^2\mathrm{cosec}^2\frac{\pi}{2}=2m^2$ となるから，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi}=2n^2$ が成り立つことになる．

同様の，$\sec^2$ に関する公式などもあって，最初の式は，こういった公式達の一部なのであろう．

ただ，もっとうまい証明はないものか．

（なお，最近，sec や cosec を余り用いなくなったが，cosec を用いる場合は csc という表記が一般的になっているようだ．）

2017 年 4 月 1 日