雑感　累乗根の煩わしさ

■　累乗根に関して，教科書などでは一般に次のように定義される．

n を正の整数とするとき，n 乗してa になる数を，a のn 乗根という．
　n が奇数のとき　実数a のn 乗根を$\sqrt[n]{a}$ と表す．
　n が偶数のとき　正の実数 a のn 乗根のうち，正のものを$\sqrt[n]{a}$ ，負のものを$-\sqrt[n]{a}$と表す．負の実数 a のn 乗根は，実数の範囲には存在しない．なお，$\sqrt[n]{0}=0$ とする．
a が正の実数，m, n が正の整数のとき，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ と定める．

■　従って，教科書流には$\sqrt[3]{-1}=-1$ は正しい記述だが，$(-1)^{\frac{1}{3}}=-1$ は記述としては正しくはない．

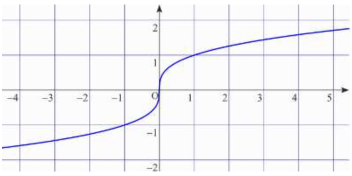
その理由を，赤チャートは，そういった記述を許容すると
$(-2)^{\frac{1}{3}}=(-2)^{\frac{2}{6}}=\{(-2)^2\}^{\frac{1}{6}}=(2^2)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}$
のような矛盾が生じるからと，明瞭に書いている．

■　実は，数式を扱うコンピュータソフトでは，それぞれ立場が分かれていて厄介である．

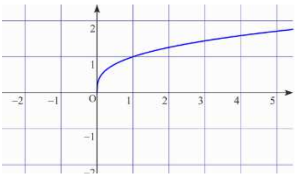
グラフを描くソフト Grapes では，この 2 つを区別していて，
$\sqrt[3]{-1}$ =Cbrt(－1)=－1 のように，Sqrt に類似した Cbrt という関数を用意している．$(-1)^{\frac{1}{3}}$ は定義されない．

グラフで言えば，【A】が $y=\sqrt[3]{x}$，　【B】が$y=x^{\frac{1}{3}}$ であり，教科書流である．

【A】

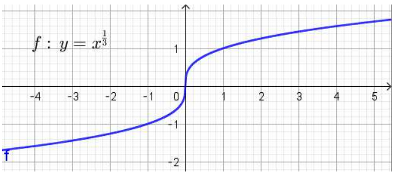


【B】



しかし，GeoGebra にはこれらの区別がなく，Cbrt という関数を持っていない．

$y=x^{\frac{1}{3}}$ のグラフは右のようになり，高校教科書の定義で言えば，$y=\sqrt[3]{x}$ の【A】と同じグラフが現れる．



FunctionView でも，GeoGebra と同様に$y=x^{\frac{1}{3}}$ で【A】のグラフが現れる．

■　数式処理ソフトについて見てみる．

Web 上で使える WolframAlpha ではこの 2 つを使い分けていて，「CubeRoot[x]　x の実数値の立方根を与える」としているので，CubeRoot[－1]=－1 である．一方，$(-1)^{\frac{1}{3}}$ については，$z^3=-1$ の虚数解の 1 つを充て，$(-1)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ としている．この 2 つの数式上の区別もあって，$\sqrt[3]{-1}$，$\sqrt[3]{-1}$の左側のように根号罫の右端を折り曲げたものが CubeRoot[－1], 右側の通常の根号のものが$(-1)^{\frac{1}{3}}$ である．$y=\sqrt[3]{x}$，と $y=x^{\frac{1}{3}}$ のグラフについては，それぞれ【A】,【B】である．

Maxima にはこのような区別がないと思われる．

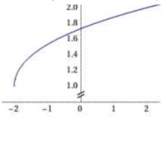
今では入手できないソフトだが愛用の DERIVE は，$y=x^{\frac{1}{3}}$ で正しく【B】のグラフが表示される（CubeRoot と言う関数はない）．また，$(-1)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となる．

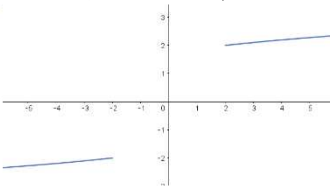
おそらく，CubeRoot という関数を持っていないソフトの方が多いと思われる．

このように，ソフトによって定義がまちまちだと，そのソフトに対応させた利用が必要になり，結構煩わしい．

■　ある必要があって，$y^3=3y+x$ をカルダノの公式で解いたi を含まない解，$y=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x^2-4}+x}}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt{x^2-4}+x}}$ のグラフを描いたとき，描かれるグラフがソフトによってまちまちで，理解に苦しんだ．

下左が WolframAlpha，右が GeoGebra によるもの．Grapes は右の曲線の第 1 象限部分だけと言った具合で，3 種 3 様である．





相違の根本理由は，奇数乗根の定義の相違にあると考えられる．

2021 年 12 月 01 日